SPITZ

ELEMENTE

DER GEOMETRIE

VITTORIO EM. III

FONDO PROVINCIA

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio 7

Palchetto 15

Num.° d' ordine 49

I. B. 22

Misc. A. 56. 394.

NAZIONALE
BIBLIOTECA
B. Prov.
Miscellanea
A
56
394
VITTORIO EM. III
NAPOLI

Elemente

der

Geometrie

in

Lehrsätzen und Aufgaben

zum Gebrauche

an

Gewerbschulen, sowie zur Selbstbelehrung für Gewerbtreibende.

Von

Carl Spitz,

Lehrer an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

Zweiter Theil.

Die Stereometrie enthaltend.

Mit 43 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Heidelberg.

C. F. Winter, akademische Verlagshandlung.

1853.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Druck von Heinrich Ludwig Brönner in Frankfurt a. M.

Vorwort.

In vorliegendem zweiten Theile habe ich diejenigen Sätze der Stereometrie behandelt, deren Kenntniß, ihrer praktischen Anwendung wegen, jedem Gewerbsmanne unentbehrlich geworden ist. Insbesondere ist die Construktion der Körpernetze und die Berechnung der Oberfläche, des Cubikinhalts und des Gewichtes der Körper hervorgehoben.

Sämmtliche Sätze sind durch die Auflösung einer beträchtlichen Anzahl von praktischen Aufgaben näher erläutert worden; da ich von der Ansicht ausging, daß ein Buch über Geometrie nur dann für den Handwerker von wahrem Nutzen sein wird, wenn er darin nicht bloß der Reihe nach die Lehrsätze aufgestellt findet, sondern diese alsobald auch auf Aufgaben angewendet sieht, wie sie ihm in seinem Gewerbe vorkommen.

Wie schon der Titel sagt, soll gegenwärtiges Werkchen nicht von Mathematikern benutzt werden, sondern besonders dem Gewerbtreibenden zur Selbstbelehrung dienlich sein. Dieß stets berücksichtigend habe ich mich auch durchgängig aller mathematischen Beweise enthalten und nur die ersten Elemente der Arithmetik als bekannt vorausgesetzt. Wo sich jedoch ein ausgesprochener Satz auf einfache und

leichtfaßliche Weise anschaulich machen ließ, habe ich dies immer gethan.

Aus dem angedeuteten Grunde konnte ich mich auch nicht entschließen, dem von mehreren Seiten ausgesprochenen Wunsche, die Auflösungen am Ende des Werkchens zusammenzustellen, Folge zu leisten. Für den Gebrauch an Schulen wäre diese Anordnung allerdings zweckmäßiger; ob aber diese Einrichtung auch dem Handwerker, der sich in dem Buche ohne fremde Hilfe zurechtfinden soll, willkommen wäre?

Bei vielen Aufgaben habe ich die Auflösung auch nach dem zwölftheiligen Maaßsysteme beigesetzt, wodurch sich das Buch auch zum Gebrauche in andern Staaten eignet.

Als Anhang sind diesem Theile noch beigegeben:

1) Eine Sammlung praktischer Aufgaben über Körperberechnungen (mit Auflösung);
2) die Berechnung eines Fasses;
3) die Berechnung eines Körpers von beliebiger Gestalt;
4) eine Tabelle der specifischen Gewichte und
5) drei Tabellen zur Vergleichung der Cubikmaaße, Gewichte und der Hohlmaaße verschiedener Staaten.

Möge diesem zweiten Theile eine ebenso günstige Beurtheilung und Aufnahme zu Theil werden, wie dem ersten.

Carlsruhe, im April 1853.

C. Spitz.

Inhalt.

Abschnitt I.

Seite

Erklärungen §. 1 — 2 1

Abschnitt II.

Von den geometrischen Körpern im Allgemeinen §. 2 — 4. 2

Von den regelmäßigen Körpern §. 2. — Von den unregelmäßigen Körpern §. 3. — Von den runden Körpern §. 4. —

Abschnitt III.

Zeichnung der Körpernetze §. 5 — 17 8

Erklärung §. 5. — Netz des regelmäßigen Vierflachs §. 6. — Netz des Würfels §. 7. — Netz des regelmäßigen Achtflachs §. 8. — Netz des regelmäßigen Zwölfflachs §. 9. — Netz des regelmäßigen Zwanzigflachs §. 10. — Netze für Prismen §. 11. — Netze für vollständige Pyramiden §. 12. — Netz für die abgekürzte Pyramide §. 13. — Netz des Cylinders §. 14. — Netz eines vollständigen Kegels §. 15. — Netz des abgekürzten Kegels §. 16. — Netz einer Kugel §. 17. —

Abschnitt IV.

Von dem Körpermaaße und dem specifischen Gewichte der Körper §. 18 — 25. 19

Von den körperlichen Maaßen oder Cubikmaaßen §. 18. — Anschreiben derselben in Form von Decimalbrüchen §. 19. — Aufgaben §. 20. — Von dem specifischen Gewichte der Körper §. 21 — 22. — Anwendung des specifischen Gewichtes zur Bestimmung des Gewichts und des Cubikinhalts eines Körpers §. 23 — 24. — Beispiele §. 25.

Seite

Abſchnitt V.

Berechnung der Körper §. 26 — 48 26

Berechnung des Prismas §. 26. — Beiſpiele §. 27. — Berechnung des Würfels §. 28. — Vom Ausziehen der Cubikwurzel §. 29 — 34. — Aufgaben §. 35. — Beiſpiele über die Berechnung des Würfels §. 36. — Berechnung der vollſtändigen Pyramide §. 37. — Beiſpiele §. 38. — Berechnung der abgekürzten Pyramide §. 39. — Beiſpiele §. 40. — Berechnung des Cylinders §. 41. — Beiſpiele §. 42. — Berechnung des vollſtändigen Kegels §. 43. — Beiſpiele §. 44. — Berechnung des abgekürzten Kegels §. 45. — Beiſpiele §. 46. — Berechnung der Kugel §. 47. — Beiſpiele §. 48. —

Anhang.

I. Aufgaben über die Berechnung der Körper 64
II. Berechnung eines Faſſes 85
III. Berechnung des Cubikinhalts eines Körpers von beliebiger Geſtalt 86
IV. Tabelle der ſpecifiſchen Gewichte 88
V. Tabelle zur Vergleichung von Cubikfußen und dem Cubikmeter 90
VI. Tabelle zur Vergleichung verſchiedener Gewichte . . 91
VII. Tabelle zur Vergleichung verſchiedener Hohlmaaße . 92

Druckfehler.

Seite 25, Zeile 3 v. o. ſtatt 2'8 lies 2,8.

Verbeſſerungen zum erſten Theile.

Seite 6 Zeile 11 v. o. ſtatt b) 2988‴; d) 17808‴ lies c) 2388‴; d) 17813‴.
" " " 14 v. u. " 5′ 3″ $6\frac{1}{2}$‴ lies 5′ 4″ $7\frac{1}{2}$‴.
" 33 " 13 v. o. " $\frac{3}{10}$ lies $1\frac{3}{10}$.
" 40 Beiſpiel 1) " 11° 4′ u. 5° 4″ lies 11° 4″ u. 5° 4′.
" 43 Zeile 3 v. o. lies 288 u. Zeile 6 lies 755 ſtatt 289 u. 756.
" 47 " 24 " " ſtatt 1,940 lies 1,931.
" 48 " 8 v. u. " 2,920 " 2,938.
" 98 " 11 u. 12 v. u. wurden 8 kr. ſtatt $2\frac{1}{2}$ in Rechnung gebracht und dadurch 146 fl. 59 kr. ſtatt 123 fl. 13 kr. als Reſultat erhalten.

Abschnitt I.

§. 1. Erklärungen.

1) Die Stereometrie umfaßt den Theil der Geometrie, welcher von der Ausmessung der Körper handelt.

2) Die Flächen, welche einen Körper begrenzen, heißen Seitenflächen. Alle Seitenflächen zusammen bilden die Oberfläche eines Körpers.

3) Die Durchschnittslinien zweier Seitenflächen werden Kanten genannt.

4) Man unterscheidet eckige und runde Körper (Theil I. §. 7). Erstere heißen auch Polyeder oder Vielflache.

5) Die eckigen Körper werden eingetheilt in regelmäßige und unregelmäßige. Regelmäßig heißt ein Körper, wenn dessen Seitenflächen regelmäßig und untereinander vollkommen gleich sind. Alle übrigen gehören zu den unregelmäßigen Körpern.

6) Diejenige Fläche eines Körpers, auf welcher derselbe stehend gedacht wird, heißt seine Grundfläche oder Basis.

7) Zur Begrenzung eines eckigen Körpers sind wenigstens vier Flächen nöthig. Runde Körper können von jeder beliebigen Anzahl Flächen eingeschlossen sein.

Abschnitt II.

Von den geometrischen Körpern im Allgemeinen.

§. 2. Von den regelmäßigen Körpern.

Zu den regelmäßigen Körpern gehören:

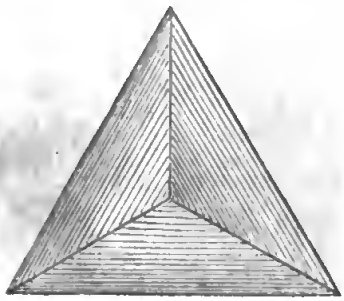


Fig. 1.

1) das regelmäßige Vierflach oder Tetraëder (Fig. 1), welches von vier gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist.

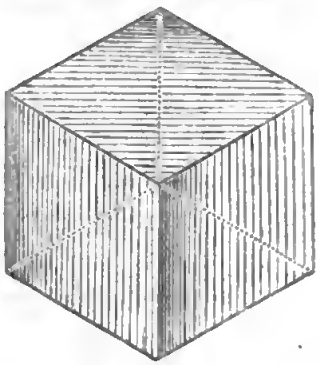


Fig. 2.

2) Das regelmäßige Sechsflach, Würfel, Cubus oder Hexaëder (Fig. 2*), von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen.

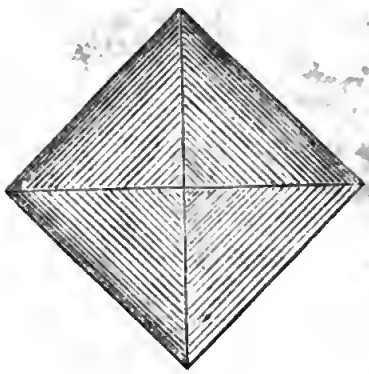


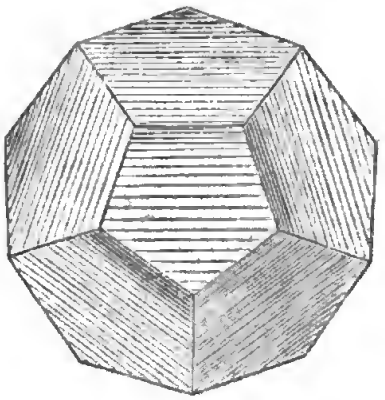
Fig. 3

3) Das regelmäßige Achtflach oder Octaëder (Fig. 3), begrenzt von acht gleichen gleichseitigen Dreiecken.

*) Die punktirten Linien einer Figur bezeichnen immer die hintern unsichtbaren Kanten; gestrichelte Linien dagegen deuten Hilfslinien an.

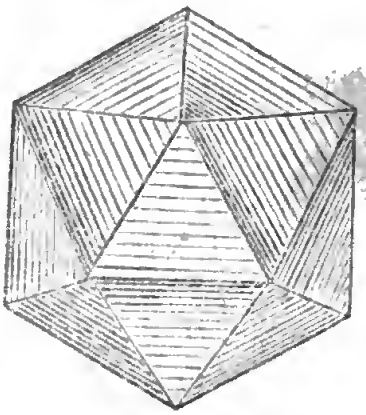
4) Das regelmäßige Zwölfflach oder Dodekaëder (Fig. 4), deſſen Begrenzung durch zwölf vollkommen gleiche regelmäßige Fünfecke gebildet wird.

Fig. 4.



5) Das regelmäßige Zwanzigflach oder Ikosaëder (Fig. 5), eingeſchloſſen von zwanzig gleichen gleichſeitigen Dreiecken.

Fig. 5.



Anmerkung. Von dieſen regelmäßigen Körpern werden wir in der Folge nur den Würfel näher unterſuchen, da von den übrigen nur ſelten im praktiſchen Leben Gebrauch gemacht wird.

§. 3. Von den unregelmäßigen Körpern.

Von dieſen betrachten wir in der Geometrie nur zwei, nämlich das Prisma und die Pyramide.

1) Das Prisma oder die Eckſäule iſt ein Körper, welcher von zwei parallelen und vollkommen gleichen Vielecken als Grundflächen und eben ſo vielen Parallelogrammen begrenzt iſt, als die Grundflächen Seiten haben.

Man benennt die Prismen nach der Anzahl ihrer Seitenflächen.

So stellt z. B. Fig. 6 ein dreiseitiges und Fig. 7 ein fünfseitiges Prisma vor.

Fig. 6.

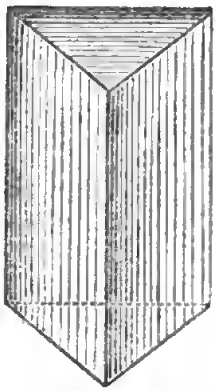
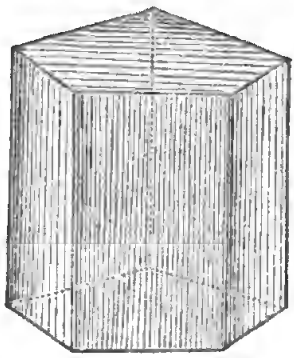


Fig. 7.



Stehen die Seitenflächen eines Prismas senkrecht auf beiden Grundflächen, so heißt dasselbe ein gerades oder senkrechtes, wenn dies nicht der Fall ist, ein schiefes Prisma.

Sind bei einem Prisma die Grundflächen selbst Parallelogramme, so erhält dasselbe den Namen Parallelepipedum oder parallelseitiger Körper.

Eine Linie, welche von der einen Grundfläche senkrecht auf die andere gezogen wird, heißt die Höhe des Prismas*).

Anmerkung. Ein Prisma wird erzeugt, wenn sich eine gerade Linie, parallel zu ihrer anfänglichen Lage bleibend, auf dem Umfange eines Vielecks herumbewegt.

2) Die Pyramide oder Spitzsäule ist ein Körper, welcher von einem Polygone als Grundfläche und eben so vielen Dreiecken begrenzt ist, als das Polygon Seiten hat.

Man benennt die Pyramiden nach der Anzahl der Seiten ihrer Grundfläche. So ist z. B. Fig. 8 eine sechsseitige Pyramide.

Alle Seitendreiecke zusammen bilden den Mantel der Pyramide.

Der Punkt *a*, welcher allen Seitendreiecken zukommt, heißt die Spitze und die Senkrechte *ab* von diesem Punkte aus auf die Grundfläche wird die Höhe der Pyramide genannt.

Wird die Grundfläche einer Pyramide durch ein regelmäßiges Vieleck gebildet und trifft die von der Spitze aus gezogene Höhe in

---

*) Eine Linie steht auf einer ebenen Fläche senkrecht, wenn sie auf zwei durch den Fußpunkt in der Fläche gezogenen geraden Linien senkrecht steht.

den Mittelpunkt dieses Vielecks, so heißt die Pyramide eine regelmäßige. Jede Pyramide wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene*) in zwei Körper zerlegt, wovon der an der Grundfläche liegende Theil abgekürzte Pyramide und der andere Theil

Fig. 8.

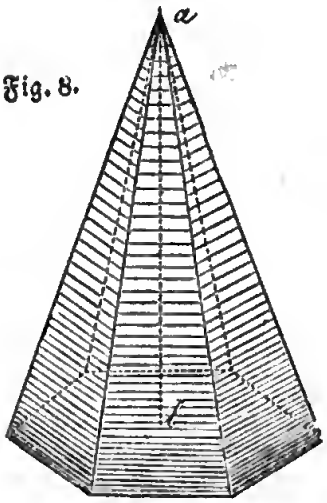
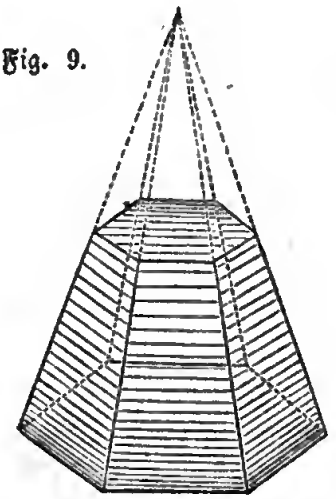


Fig. 9.



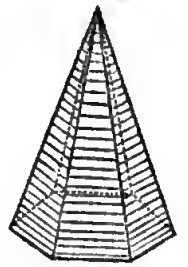


Fig. 10.

Ergänzungspyramide genannt wird. So theilt z. B. eine solche Ebene die Pyramide Fig. 8 in die abgekürzte Pyramide Fig. 9 und in die Ergänzungspyramide Fig. 10.

Anmerkung. Eine Pyramide wird erzeugt, wenn man ein Vieleck und außerhalb der Ebene desselben einen Punkt annimmt und eine durch diesen Punkt gehende gerade Linie an dem Umfange des Vielecks herumbewegt.

§. 4. Von den runden Körpern.

Von den runden Körpern verdienen nur drei einer nähern Betrachtung; nämlich: der Cylinder, der Kegel und die Kugel.

---

*) Zwei Ebenen sind parallel oder gleichlaufend, wenn sie, so weit man sich dieselben auch verlängert denken mag, einander nie treffen.

Zwei Ebenen, welche auf einer geraden Linie senkrecht stehen, sind parallel.

1) Der Cylinder oder die Walze (Fig. 11) ist ein Körper, welcher von zwei gleichen parallelen Kreisen als Grundflächen und einer krummen Seitenfläche begrenzt ist.

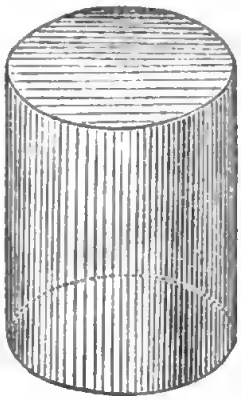


Fig. 11.

Man kann einen Cylinder ansehen als ein Prisma, dessen Grundflächen Vielecke von unendlich großer Seitenzahl sind.

Die krumme Begrenzungsfläche heißt der Mantel des Cylinders.

Die senkrechte Linie von einer Kreisfläche auf die andere bestimmt die Höhe dieses Körpers.

Eine gerade Linie, welche durch die beiden Mittelpunkte der Grundflächen geht, heißt die Achse des Cylinders.

Steht diese Achse auf beiden Grundflächen senkrecht, so ist der Cylinder ein gerader, wenn dies nicht der Fall ist, so wird er ein schiefer genannt.

*Anmerkung. Wählt man statt des in der Anmerkung zu §. 3. 1. erwähnten Vielecks einen Kreis, so wird ein Cylinder erzeugt.

2) Der Kegel oder Conus (Fig. 12) ist ein Körper, welcher von einem Kreis als Grundfläche und einer krummen Seitenfläche (Mantel genannt) begrenzt ist, welche in einen Punkt ausläuft, der die Spitze des Kegels heißt.

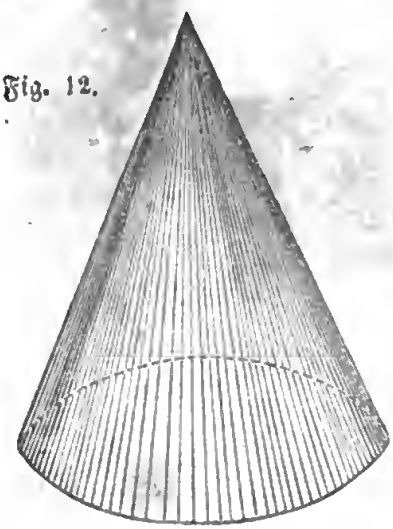


Fig. 12.

Der Kegel kann als eine Pyramide angesehen werden, welche ein Vieleck von unendlich vielen Seiten zur Grundfläche hat.

Die senkrechte Linie von der Spitze auf die Grundfläche heißt die Höhe und die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche, die Achse des Kegels.

Steht diese Achse senkrecht auf der Grundfläche, so wird der Kegel ein gerader oder senkrechter, im andern Falle ein schiefer genannt.

Eine Linie von der Spitze nach dem Umfange der Grundfläche heißt Seite des Kegels. Bei einem senkrechten Kegel sind alle Seiten einander gleich.

Wie die Pyramide, so läßt sich auch der Kegel, durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, in einen abgekürzten Kegel und einen Ergänzungskegel zerlegen.

Anmerkung. Wird statt des in der Anmerkung zu §. 3. 2. angeführten Vielecks ein Kreis angenommen, so erzeugt die Linie eine Kegelfläche.

3) Die Kugel oder Sphäre ist ein Körper, welcher nur von einer krummen Fläche eingeschlossen ist, die von einem festen Punkte überall gleiche Entfernung hat.

Man kann sich dieselbe durch die Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser entstanden denken.

Der feste Punkt heißt Mittelpunkt; eine Linie vom Mittelpunkt nach der Oberfläche wird Radius oder Halbmesser und eine Linie von einem Punkt der Oberfläche durch den Mittelpunkt bis zur entgegengesetzten Seite derselben, Durchmesser oder Diameter genannt.

Wird eine Kugel von einer Ebene durchschnitten, so ist der Durchschnitt ein Kreis.

Geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so heißt der Durchschnittskreis ein größter Kreis.

Legt man mehrere parallele Ebenen durch eine Kugel, so entstehen Kreise, welche mit einander parallel laufen und deren Mittelpunkte in dem nämlichen Durchmesser der Kugel liegen. Diese Kreise heißen Parallelkreise.

Der durch eine Ebene von einer Kugel abgeschnittene Theil *pqmn* (Fig 13) heißt Kugelabschnitt oder Kugelsegment und die krumme Oberfläche desselben wird Kugelhaube genannt.

Ein Theil der Kugel wie *amnpq*, welcher durch die Umdre-

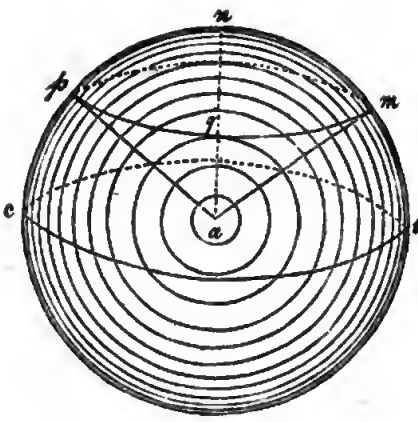


Fig. 13.

hung eines Kreisſektors *amnp* um die Mittellinie *an* entſtanden gedacht werden kann, heißt Kugelausſchnitt oder Kugelſektor.

Jeder zwiſchen zwei parallelen Ebenen ſich befindende Theil einer Kugel, wie *cbmp* wird körperliche Kugelzone und die krumme Oberfläche derſelben Kugelzone oder Kugelgürtel genannt.

Abſchnitt III.

Zeichnung der Körpernetze.

§. 5. Erklärung.

Werden die Begrenzungsflächen eines Körpers auf einer Ebene ſo neben einanderliegend dargeſtellt, daß ſie bei richtiger Zuſammenlegung wieder den Körperraum einſchließen, ſo heißt dieſe Zeichnung das Netz des Körpers.

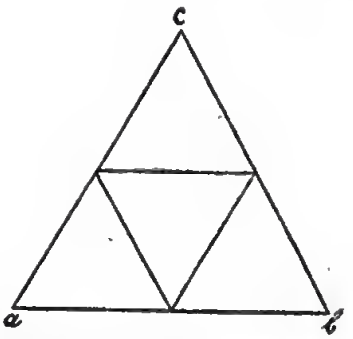
Anmerkung. Bei nachfolgenden Zeichnungen der Körpernetze ſind durch ſtärkere Striche diejenigen Linien bezeichnet, welche beim Ausſchneiden aus Pappdeckel ganz durchgeſchnitten, und durch feinere Striche ſolche Linien angedeutet, welche nur zur Hälfte eingeſchnitten werden. Geſtrichelte Linien geben die zur Conſtruktion nöthigen Hilfslinien an und werden beim Ausſchneiden nicht berückſichtigt.

§. 6. Aufgabe.

Das Netz des regelmäßigen Vierflachs (Tetraëders) zu zeichnen. (Fig. 14.)

Auflösung. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck *abc* (Thl. I. § 32. 3), halbire jede der drei Seiten und verbinde die Halbirungspunkte durch gerade Linien.

Fig. 14.



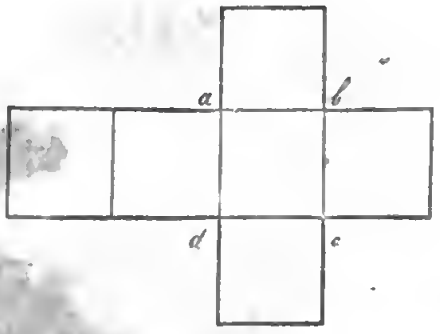
Anmerkung. Ist die Kante des Vierflachs gegeben, so muß *ab* gleich der doppelten Länge derselben angenommen werden.

§. 7. Aufgabe.

Das Netz des regelmäßigen Sechsflachs oder Würfels (Hexaëders) zu construiren. (Fig. 15.)

Fig. 15.

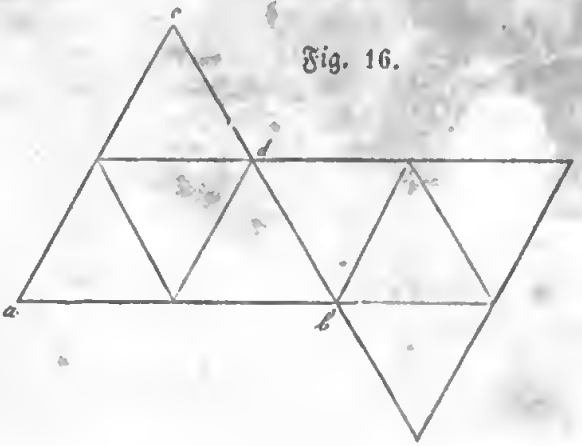
Aufl. Man zeichne ein Quadrat *abcd* und hänge an die Seiten desselben fünf andere von gleicher Größe, wie es die Figur angibt.



§. 8. Aufgabe.

Das Netz des regelmäßigen Achtflachs (Octaëders) zu zeichnen. (Fig. 16.)

Fig. 16.



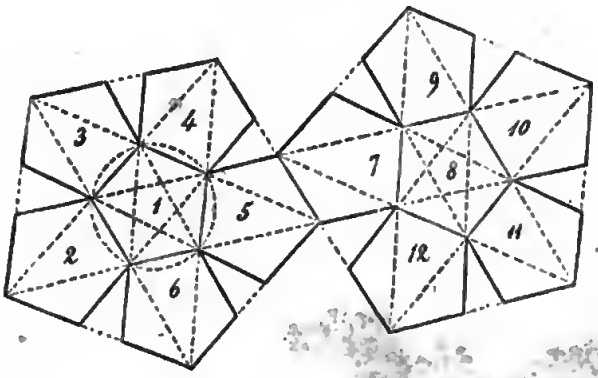
Auflöſ. Man zeichne zuerſt das Netz des regelmäßigen Vierflachs *abc* (§. 6) und hänge an die Seite *bd* ein anderes gleich großes in umgekehrter Lage, wie aus der Figur zu erſehen iſt.

§. 9. Aufgabe.

Conſtruktion des Netzes eines regelmäßigen Zwölfflachs (Dodekaëders). (Fig. 17.)

Auflöſ. Man zeichne in einen Kreis das regelmäßige Fünfeck 1. (Thl. I. §. 60. 5.) und hänge an die Seiten deſſelben

Fig. 17.



andere regelmäßige Fünfecke 2, 3, 4, 5 und 6 von gleicher Größe. Aehnlich, wie dieſe ſechs Fünfecke, conſtruire man die ſechs andern von 7 bis 12 und hänge beide Gruppen mit einer Seite ſo zuſammen, wie vorſtehende Figur anzeigt.

Das nöthige Verfahren um die Fünfecke zu erhalten, iſt aus den geſtrichelten Linien der Figur leicht zu erſehen und bedarf alſo keiner nähern Erörterung.

Anmerkung. Soll die Kante des Zwölfflachs von gegebener Länge ſein, ſo muß das Fünfeck 1 nach Theil I. Anhang I. D. 22 über dieſe Länge conſtruirt werden.

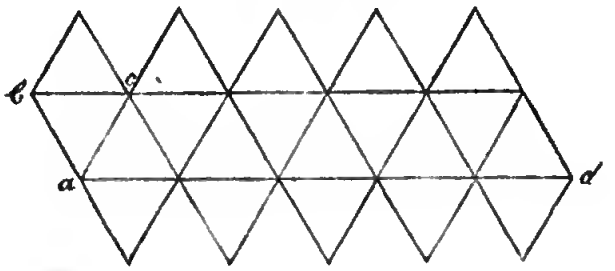
§. 10. Aufgabe.

Das Netz des regelmäßigen Zwanzigflachs (Ikoſaëders) zu conſtruiren. (Fig. 18.)

Auflöſ. Zeichne über *bc* (gleich der Kantenlänge) ein gleichſeitiges Dreieck *abc*, verlängere die Seite *bc* und trage

sie von *c* aus viermal auf die Verlängerung ab. Ziehe durch *a* die zu *b c* parallele Linie *a d* und trage die Seite des Dreiecks von *a* aus fünfmal auf ihr ab. Verbindet man nun die Theilpunkte, wie die Figur angibt und verlängert

Fig. 18.



die Verbindungslinien bis sie sich schneiden, so erhält man das verlangte Netz.

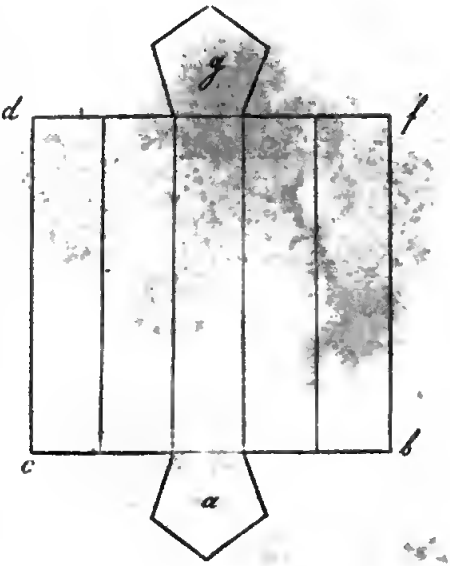
§. 11. Aufgabe.

Das Netz eines senkrechten Prismas zu zeichnen.

1) Für ein fünfseitiges Prisma mit regulärer Grundfläche. (Fig. 19.)

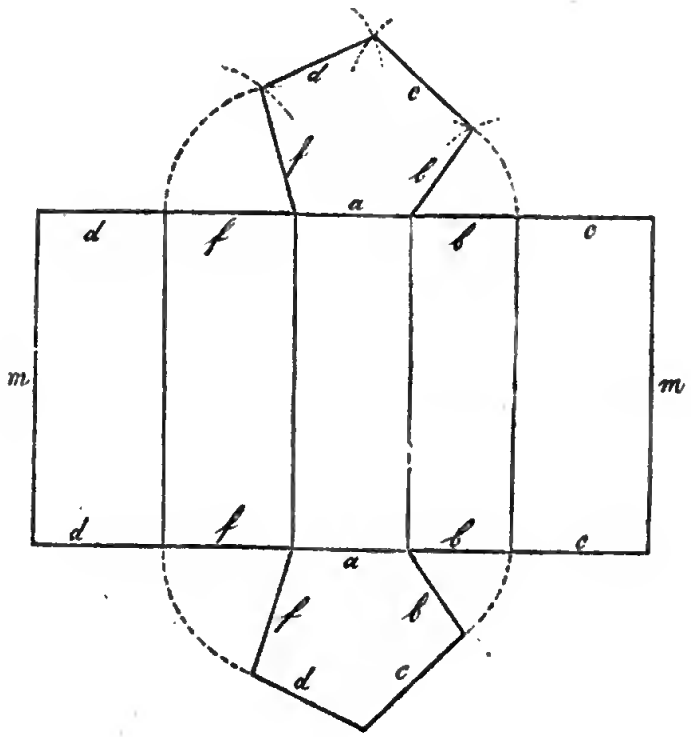
Aufl. Das Fünfeck *a* bilde die Grundfläche. Trage auf der Verlängerung einer Seite desselben, diese Seite noch viermal auf, errichte in den Theilpunkten Senkrechte von gleicher Länge wie *c d*, *b f* u. s. w. (welche gleich der Höhe gemacht werden müssen, wenn diese gegeben ist), ziehe *d f* und construire über einen Theil dieser Linie das obere Fünfeck *g*.

Fig. 19.



2) Für ein fünfseitiges Prisma mit unregelmäßiger Basis. (Fig. 20.)

Fig. 20.

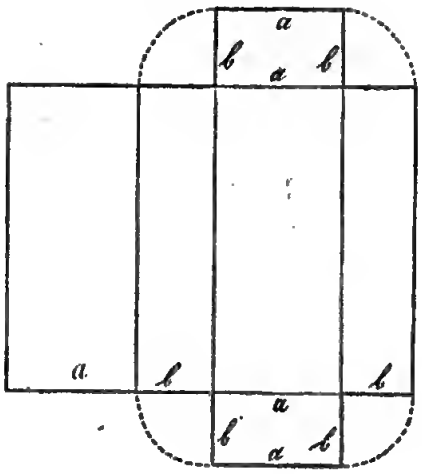


Auflöſ. *a*, *b*, *c*, *d* und *f* ſeien die Seiten der Basis. Verlängere eine derſelben, z. B. *a* und trage auf ihrer Verlängerung die andern Seiten nach der Reihe neben einander, wie dieſes durch die betreffenden Buchſtaben an der Figur ausgedrückt iſt; errichte alsdann in den Theilpunkten Senkrechte u. ſ. f. wie in dem vorhergehenden Falle.

Das obere Fünfeck erhält man durch Antragen der Winkel und Seiten des untern Fünfecks. (Vergl. Theil I. Anhang I. 19 und 20.)

3) Für das Parallelepipedum. (Fig. 21.)

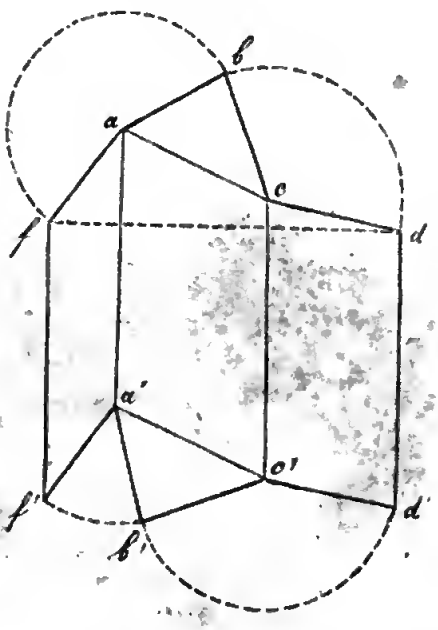
Fig. 21.



Auflöſ. Die Grundfläche wird hier ein Parallelogramm; im Uebrigen ſtimmt die Conſtruktion mit den beiden zuletzt mitgetheilten Auflöſungen überein.

4) Für ein ſchiefes dreiſeitiges Prisma. (Fig. 22).

Fig. 22.



Auflöſ. *abc* ſei eine Grundfläche. Ziehe $af = ab$ unter irgend einem Winkel zu *ac*, nehme die Richtung der Seitenkanten *ff'*, *aa'*, *cc'*, *dd'*, beliebig (wenn nichts näher beſtimmt iſt), aber unter einander parallel an; errichte *fd* ſenkrecht auf *ff'* und ſchlage *cb* nach *cd* auf *fd* ab, ſo fallen beim Zuſammenlegen *f* und *d* mit *b* zuſammen. Der untere Theil des Netzes kann nun leicht beſtimmt werden; indem *f' a'* parallel mit *fa*, *a' c'* und *c' d'* parallel mit *ac* und *cd* gezogen

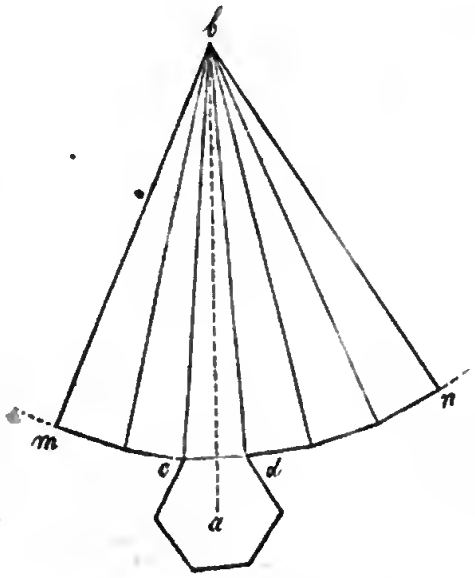
werden. Das △ *abc* wird zuletzt in die Lage *a'b'c'* gezeichnet.

§. 12. Aufgabe.

Das Netz einer vollständigen Pyramide zu zeichnen.

1) **Für die sechsseitige Pyramide mit regelmäßiger Basis.** (Fig. 23.)

Fig. 23.



Auflösung. Es sei *a* die sechsseitige Grundfläche. Halbire eine Seite derselben z. B. *cd* durch die Senkrechte *ab*; von einem Punkte *b* dieser Linie aus beschreibe mit *bc* = *bd* den Bogen *mn* und trage auf diesen die Seite des Sechsecks noch fünfmal auf. Verbindet man nun die Theilpunkte unter sich und mit *b*, so erhält man das Netz.

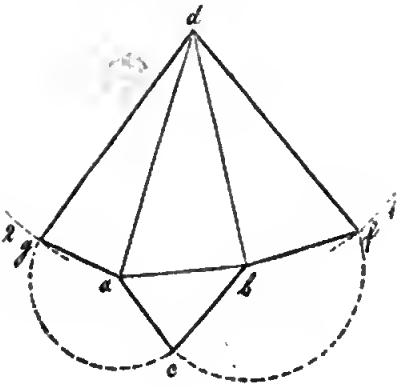
Anmerkung. Soll die Kante eine gegebene Länge haben, so nehme man diese in Zirkel und schlage sie von *d* aus nach *b* auf *ab*, um den Mittelpunkt (*b*) für den Bogen *mn* zu erhalten.

2) **Für eine schiefe dreiseitige Pyramide.** (Fig. 24.)

Auflös. *abc* sei die Grundfläche, die Seitenkanten sollen die gegebenen Längen *ad*, *bd* und *gd* haben. Man beschreibe über *ab* mit zwei der gegebenen Seitenkanten ein Dreieck *adb*, zeichne von *d* aus mit der dritten Seitenkante die Bogen 1 und 2, durchschneide Bogen 1 von *b*

aus mit *b c* und Bogen 2 von *a* aus mit *a c* und ziehe nach den Durchschnittspunkten die Linien *d g*, *d f*, *a g*, *b f*, so erhält man das Netz.

Fig. 24.



§. 13. Aufgabe.

Das Netz einer fünfseitigen abgekürzten Pyramide mit regelmäßiger Basis zu construiren. — (Fig. 25.)

Auflös. Nachdem man das Netz der vollständigen Pyramide auf die in § 12. 1. angegebene Weise gezeichnet hat, beschreibt man von *b* aus mit der Seitenkante der Ergänzungspyramide den Bogen *p n* und verbindet die Durchschnittspunkte desselben mit den Radien durch die Linien *d*. Beschreibt man nun noch über einen solchen Theil *d* ein re-

Fig. 25.

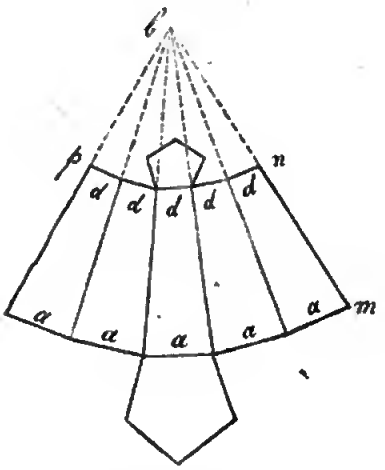
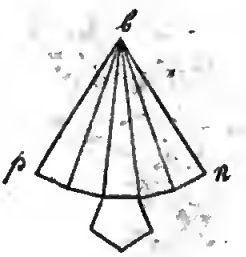


Fig. 26.



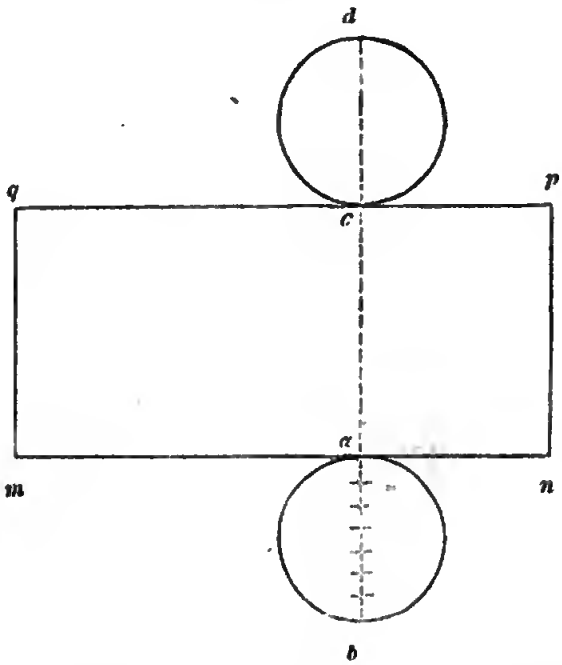
gelmäßiges Fünfeck (Thl. I. Anhang I. 22), so bildet dieses die obere Grundfläche.

Soll auch das Netz der Ergänzungspyramide gezeichnet werden, so construire man den Theil *bpn* nochmals besonders, hänge aber das Fünfeck über *d* in der Art an, wie es Fig. 26 zeigt.

§. 14. Aufgabe.

Das Netz eines senkrechten kreisförmigen Cylinders zu construiren. (Fig. 27.)

Fig. 27.



Auflös. *ab* sei die Grundfläche; ziehe an diese die Tangente *mn*, theile den Durchmesser *ab* in 7 gleiche Theile und trage deren 22, oder was dasselbe ist, dreimal den ganzen Durchmesser und einen solchen Theil auf *mn* ab. (Vgl. Thl. I. §. 63. b. Anmerkung.) Errichte alsdann *np* (gleich der Höhe des Cylinders) senkrecht auf *mn* und construire das Rechteck *mnpq*. Den obern Kreis *cd* beschreibe man mit dem gleichen Halbmesser, wie den untern *ab*, jedoch so, daß er die Linie *qp* berührt.

§. 15. Aufgabe.

Das Netz eines vollständigen senkrechten kreisförmigen Kegels zu zeichnen. (Fig. 28.)

Aufl. Verlängere den Durchmesser *ba* des Grundkreises. Beschreibe mit *fa* (gleich der Seite des Kegels) den Kreisbogen *cad* und mache diesen gleich dem Umfange der Grundfläche d. i. = $\frac{22}{7}$ des Durchmessers *ab*.

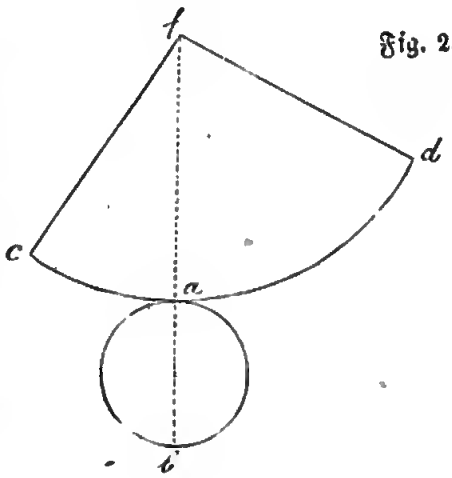
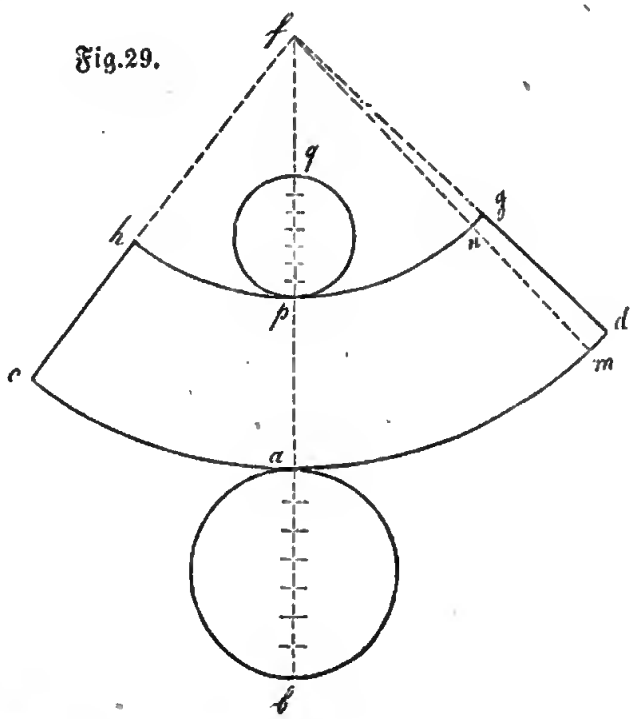


Fig. 28.

§. 16. Aufgabe.

Das Netz für den abgekürzten Kegel zu zeichnen. (Fig. 29.)

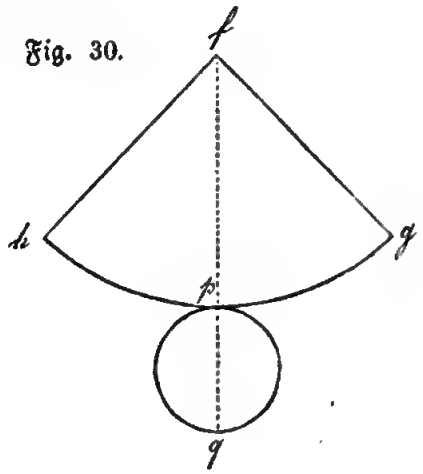
Fig. 29.



Auflöſ. Man zeichne zuerſt das Netz des vollſtändigen Kegels wie in §. 15, und trage alsdann von *d* aus die Seite des abgekürzten Kegels nach *dg*. Iſt dieſe nicht beſtimmt, ſo nehme man Punkt *g* beliebig an. Beſchreibe hierauf von *f* aus mit *fg* den Bogen *gh*, mache *md* gleich $\frac{1}{7}$ des Durchmeſſers *ab*, ziehe *fm* und trage das Stück *gn* von *p* aus 7mal gegen *q*, ſo bildet der Kreis *pq* über dieſen 7 Theilen die obere Grundfläche.

Das Netz des Ergänzungskegels (Fig. 30) erhält man, wenn der Kreis *pq* ſtatt nach der obern Seite von *hpg*, nach abwärts angehängt wird.

Fig. 30.



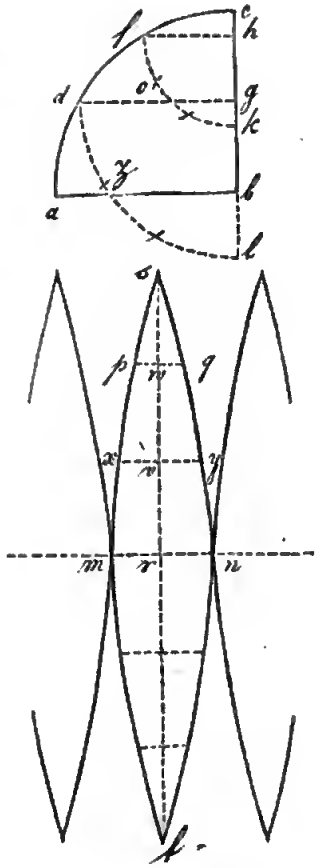
§. 17. Aufgabe.

Das Netz einer Kugel zu conſtruiren. (Fig. 31.)

Auflöſung. Iſt der Halbmeſſer der Kugel gegeben, z. B. = *bc*, ſo beſchreibe man damit den Viertelskreis *adcb*, theile den Bogen *adc* in 3 gleiche Theile *ad*, *df*, *fc* und trage einen ſolchen Theil *ad* nach *mn*. Errichte in der Mitte von *mn* die Senkrechte *st*, trage *mn* oder *ad* nach *rv*, *vw* und *ws*, und mache *rt* = *rs*; ſo wird alſo *ts* = 2 *rs* = 2 Bog. *adc* oder gleich dem halben Umfang der Kugel. Zieht man nun *dg* ſenkrecht auf *bc*, ſo gibt dieſe Linie den Halbmeſſer des Kreiſes, nach welchem die Kugel durch eine durch *d* gehende und auf *bc* ſenkrecht ſtehende Ebene geſchnitten wird. Beſchreibt man daher von *g* aus mit *gd* einen Viertelskreis *dl*, theilt dieſen in 3 gleiche Theile und trägt von *v* aus die Hälfte eines ſolchen Theils wie *dz* nach *x* und *y*, ſo bildet *xy* den zwölften Theil des ganzen Umfangs

des erwähnten Kreises. Eben so ziehe man *fh* senkrecht auf *b c*, zeichne von *h* aus mit *hf* den Bogen *fk*, theile auch diesen in 3 gleiche Theile und trage die Hälfte eines solchen Theils *fo* von *w* nach *p* und *q*. Führt man nun unterhalb *mn* dieselbe Construktion aus und zeichnet durch die Punkte *s*, *p*, *x*, *m* u. s. w. aus freier Hand oder mit dem Schwungholze eine krumme Linie, so stellt diese Figur *s m t n s* den zwölften Theil der Kugeloberfläche vor.

Fig. 31.



Construirt man daher 12 solcher Streifen nebeneinander, so bilden diese das Netz der ganzen Kugel.

Abschnitt IV.

Von dem Körpermaaße und dem specifischen Gewichte der Körper.

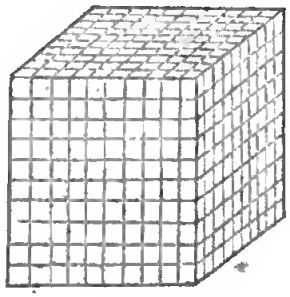
§. 18. Von den körperlichen Maaßen oder Cubikmaaßen.

Unter Cubikinhalt eines Körpers versteht man den körperlichen Raum, welchen derselbe einnimmt.

Der Cubikinhalt wird erhalten, wenn man unterſucht, wie oft ein anderer als Cubik- oder Körpereinheit angenommener Körper in dem zu unterſuchenden Körper enthalten iſt.

Als Cubikeinheit nehmen wir einen Würfel an, deſſen Seite ein Fuß lang iſt. Dieſen Würfel nennt man Cubikfuß oder Cubikſchuh und bezeichnet dies Wort durch c′.

Fig. 32.



Der Cubikfuß enthält 1000 Cubikzolle (bezeichnet durch c″); denn auf der Grundfläche dieſes Würfels, welche 1□′ oder 100□″ Inhalt hat, können 100 Cubikzolle d. h. 100 Würfel deren Seiten ein Zoll lang ſind, geſtellt und in den ganzen Würfel oder den Cubikfuß, 10 ſolcher Schichten von 100 Cubikzollen über einander, alſo 1000 Cubikzolle, gebracht werden. Fig. 32. wird dieſes anſchaulich machen.

Der Cubikzoll wird in 1000 Cubiklinien (c‴) getheilt.

Als Maaßeinheit für Bruchſteine bedient man ſich eines Würfels von 6 Fuß Seite und nennt dieſen eine Cubikklafter. Eine ſolche enthält $6 \times 6 \times 6 = 216$ c′ (§. 28. c.).

Die Klafter, nach welcher bei Brennholz gerechnet wird, bildet ein Prisma von 6 Fuß Breite, 6 Fuß Höhe und 4 Fuß Dicke und enthält (§. 26. b. Anmerkung.) $6 \times 6 \times 4 = 144$ c′.

Anmerkungen. 1) Theilt man den Cubikfuß in 18 gleiche Theile, ſo bildet ein ſolcher Theil die bad. Maas oder auch das Meßlein. 18 Maas oder auch 18 Meßlein geben alſo einen Cubikfuß und eine Maas faßt eben ſo viel, wie ein Meßlein.

2) Bei dem zwölftheiligen Maaßſyſtem enthält der Cubikfuß 1728 Cubikzolle und der Cubikzoll 1728 Cubiklinien.

§. 19.

Bei der Berechnung bedient man ſich auch hier mit Vortheil der Decimalbrüche*).

Wie das Anſchreiben der Cubikmaaße in Form von Decimal-

*) Eine kurze Abhandlung der Lehre von den Decimalbrüchen findet man Thl. I. Anhang VI.

brüchen geſchieht, iſt aus folgenden Beiſpielen, in welchen die Fuße als Ganze geſetzt wurden, leicht zu erſehen.

1) $8\,c'\ 346\,c'' = 8\frac{346}{1000}\,c'$ oder $8{,}346\,c'$ (da $1\,c'' = \frac{1}{1000}\,c'$ alſo $346\,c'' = \frac{346}{1000}\,c'$).
2) $457\,c'' = \frac{457}{1000}\,c' = 0{,}457\,c'$.
3) $36\,c'\ 27'' = 36\frac{27}{1000}\,c' = 36{,}027\,c'$.
4) $9\,c'' = \frac{9}{1000}\,c' = 0{,}009\,c'$.
5) $7\,c'\ 30\,c'' = 7\frac{30}{1000}\,c' = 7\frac{3}{100}\,c' = 7{,}03\,c'$.
6) $47\,c'\ 354\,c''\ 864\,c''' = 47{,}354864\,c'$. ($1\,c' = 1000\,c'' = 1000000\,c'''$, alſo $1\,c''' = \frac{1}{1000000}\,c'$ und $354\,c''\,864\,c'''$ oder $354864\,c''' = \frac{354864}{1000000}\,c'$.)
7) $5\,c'\ 24\,c''\ 39\,c''' = 5{,}024039\,c'$.
8) $16\,c'\ 51\,c''' = 16{,}000051\,c'$.

Man bemerkt hieraus zugleich, daß bei den Decimalſtellen immer 3 Ziffer zu einer Gattung gehören und daß alſo umgekehrt geleſen werden muß:

9) $364{,}762504\,c' = 364\,c'\ 762\,c''\ 504\,c'''$.
10) $7{,}425\,c' = 7\,c'\ 425\,c''$.
11) $0{,}7\,c' = 700\,c''$. ($700\,c'' = \frac{700}{1000}\,c' = \frac{7}{10}\,c'$.)
12) $0{,}8426\,c' = 842\,c''\ 600\,c'''$.
13) $34{,}007\,c' = 34\,c'\ 7\,c''$.
14) $728{,}030042\,c' = 728\,c'\ 30\,c''\ 42\,c'''$.
15) $0{,}003005\,c' = 3\,c''\ 5\,c'''$.
16) $72{,}00005\,c' = 72\,c'\ 50\,c'''$.

§. 20. Aufgaben.

1) Wie viel Cubikzoll ſind nach dem zehntheiligen Maaßſyſteme:

   a) $3\,c'$; b) $25\,c'\ 346\,c''$; c) $764\,c'\ 8\,c''$; d) $5\,c'\ 28\,c''$.

   Reſultate: a) $3000\,c''$; b) $25346\,c''$; c) $764008\,c''$; d) $5028\,c''$.

2) Wie viel Cubikzoll geben dieſe Werthe nach dem zwölftheiligen Syſteme?

   Reſult.: a) $5184\,c''$; b) $43516\,c''$; c) $1320200\,c''$: d) $8668\,c''$.

3) Schreibet folgende zehntheilige Maaße in Form von Decimalbrüchen an, in welchen die Fuße die Stelle der Ganzen einnehmen:

a) 84 c′ 546 c″; b) 7 c′ 84 c″; c) 3 c′ 7 c″; d) 54 c″; e) 54 c′ 67 c″ 825 c‴; f) 58 c″ 36 c‴; g) 51 c‴; h) 7 c′ 8 c″ 9 c‴.

Resultat: a) 84,546 c′; b) 7,084 c′; c) 3,007 c′; d) 0,054 c′; e) 54,067825 c′; f) 0,058036 c′; g) 0,000051 c′; h) 7,008009 c′.

4) Wie werden folgende Decimalbrüche gelesen?

a) 324,578 c′; b) 19,56 c′; c) 0,784 c′; d) 0,003 c′; e) 8,504623 c′; f) 768,000625 c′; g) 0,034572 c′; h) 7,004038 c′; i) 0,00062 c′; k) 40,050009 c′.

Resultat: a) 324 c′ 578 c″; b) 19 c′ 560 c″; c) 784 c″; d) 3 c″; e) 8 c′ 504 c″ 623 c‴; f) 768 c′ 625 c‴; g) 34 c″ 572 c‴; h) 7 c′ 4 c″ 38 c‴; i) 620 c‴; k) 40 c′ 50 c″ 9 c‴.

§. 21.

Von dem specifischen Gewichte der Körper.

Jeder Körper übt, vermöge der Anziehung der Erde, einen Druck auf seine Unterlage aus. Diesen Druck, welchen wir mittelst der gewöhnlichen Waage nach Centner, Pfunden u. s. w. bestimmen können, nennt man das absolute Gewicht oder kurz das Gewicht des Körpers. Die Zahl dagegen, welche angibt, wie viel mal ein Körper schwerer ist als eine gleich große Masse (Volumen) Wasser, heißt sein specifisches Gewicht.

Findet man z. B. das Gewicht eines Cubikfußes Eisen gleich 388,8 ℔ und das Gewicht von einem Cubikfuße Wasser gleich 54 badische ℔*), so gibt 388,8 : 54 = 7,2 und das Eisen ist also

*) Das Gewicht von einem c′ reinem Wasser ist in verschiedenen Staaten auch durch verschiedene Zahlen ausgedrückt. So wiegt 1 bayerisch. c′ = 44,3 bayr. ℔, 1 engl. c′ = 62,5 engl. ℔; 1 gr. hess. c′ = 31,2 hess. ℔; 1 preuß. c′ = 66 preuß. ℔; 1 würtemberger c′ = 50,2 ℔; 1 wiener c′ = 56 ℔ 12 Loth wien. Gewicht. Das specifische Gewicht ist überall dasselbe.

7,2 mal schwerer, wie das Wasser, oder das specifische Gewicht des Eisens ist 7,2.

Diese Art, das specifische Gewicht eines Körpers durch Abwägen und Vergleichen mit Wasser zu bestimmen, scheint zwar sehr einfach, allein man wird sich leicht überzeugen, daß sich das Verfahren nicht allgemein in Anwendung bringen läßt. Eine andere kürzere und sicherere Methode werden wir in nachstehendem Paragraphe kennen lernen.

§. 22.

Zur raschen und genauen Bestimmung des specifischen Gewichtes sämmtlicher Körper gibt uns die Naturlehre ein einfaches Mittel an die Hand. Dort wird nämlich nachgewiesen, daß jeder Körper, sobald er in Wasser getaucht wird, so viel an seinem wirklichen (absoluten) Gewichte verliert, als das Volumen Wasser wiegt, welches er bei seinem Eintauchen verdrängt, d. h. als eine Wassermasse wiegt, welche einen ebenso großen Cubikinhalt hat, wie der unter Wasser sich befindende Theil des Körpers, oder, wenn derselbe ganz eingetaucht ist, wie der Körper selbst.

Um daher das specifische Gewicht eines Körpers zu finden, bestimme man zuerst dessen absolutes Gewicht, ziehe hiervon das Gewicht, welches er unter Wasser besitzt, ab und dividire mit dem erhaltenen Gewichtsverlust in das absolute Gewicht.

Wiegt z. B. ein Stück Blei 305 ℔, unter Wasser aber nur 278 ℔, so beträgt sein Gewichtsverlust oder das Gewicht einer gleich großen Wassermasse 305 — 278 = 27 ℔; folglich ist das specifische Gewicht des Bleis

$$= 305 : 27 = 11{,}29 \ldots\ldots$$

Die weitere Behandlung dieses Gegenstandes gehört in das Gebiet der Naturlehre.

Man hat die spec. Gewichte sämmtlicher Körper auf die so eben angeführte Weise genau bestimmt und solche in Tabellen zusammengestellt. Für die in der Praxis wichtigeren Stoffe sind im Anhange IV. die spec. Gewichte angegeben.

§. 23.

Nach Vorhergehendem ist es nun leicht das absolute Gewicht

eines Körpers zu berechnen, wenn der Cubikinhalt und das specifische Gewicht desselben bekannt sind.

Beträgt z. B. der Kubikinhalt eines eisernen Würfels 3 Cubikfuß und ist das specifische Gewicht des Eisens = 7,2, so wiegt eine gleich große Wassermasse = 3 × 54 ℔ = 162 ℔ (da 1 c′ Wasser 54 bad. ℔ wiegt), folglich der eiserne Würfel (vergl. §. 21.) = 162 × 7,2 = 1166,4 ℔ oder 11 Centner 66⅔ ℔.

Man erhält demnach das Gewicht eines Körpers in Pfunden, wenn man den Cubikinhalt desselben, in Cubikfußen ausgedrückt, mit 54 (dem Gewicht eines c′ Wasser) und das Produkt nochmals mit dem specifischen Gewichte multiplizirt.

Diese Art der Gewichtsbestimmung wird immer dann mit großem Vortheil angewendet, wenn es die Umstände nicht erlauben, Körper mittelst einer Wage abzuwägen, und ist daher für die Praxis von großer Wichtigkeit.

§. 24.

Aus dem in §. 23. ausgesprochenen Satze ergibt sich zugleich folgende, ihrer häufigen Anwendung wegen, ebenfalls sehr wichtige Regel:

Kennt man das absolute und das spezifische Gewicht eines Körpers, so wird der Cubikinhalt desselben in Cubikfußen gefunden, wenn man das specifische Gewicht mit dem Gewichte eines Cubikfußes Wasser multiplizirt und mit dem Produkte in das in Pfunden ausgedrückte absolute Gewicht dividirt.

Beträgt z. B. das Gewicht eines Stück Kupfers 18 ℔ und das specifische Gewicht 8,8; so hat man 54 × 8,8 = 475,2; also ist der Cubikinhalt = 18 : 475,2 = 180 : 4752 = 0,037876 c′ oder 37 c″ 876 c‴.

§. 25. Beispiele.

1) Wie schwer ist ein Postament von Marmor, dessen Cubikinhalt 48 c′ 475 c″ beträgt?

Auflös. Das specifische Gewicht des Marmors ist 2,8 (siehe Anhang IV.), also nach §. 23. das Gewicht des Postaments

$= 48{,}475 \times 54 \times 2{,}8 = 7329{,}42$ ℔ oder 73 Centner 29 ℔ 13 Loth.

Anmerkung. Nach preuß. Systeme erhält man $48\frac{475}{1728} \times 66 \times 2'8 = 8921{,}2$ ℔.

2) Eine Pyramide von Sandstein, dessen specifisches Gewicht = 2,5 ist, hat einen Cubikinhalt von 825 c'; wie groß ist das Gewicht derselben?

Auflös. Nach §. 23. findet man das Gewicht $= 825 \times 54 \times 2{,}5 = 111375$ ℔ oder 1113 Ctr. 75 ℔.

3) Der Cubikinhalt eines tannenen Stammes wurde zu 132 c' berechnet; wie schwer ist dieser, wenn das specifische Gewicht des Tannenholzes 0,55 beträgt?

Auflös. Das Gewicht ist $= 132 \times 54 \times 0{,}55 = 3920{,}4$ ℔ oder 39 Ctr. $20\frac{2}{5}$ ℔.

Anmerkung. Nach bayerisch. Syst. würde man finden: $132 \times 44{,}3 \times 0{,}55 = 3216\frac{9}{50}$ ℔.

4) Eine gußeiserne Walze wiegt $1555\frac{1}{5}$ ℔; wie groß ist der Cubikinhalt derselben?

Auflös. Da nach Anhang IV. das specifische Gewicht des Gußeisens = 7,2 und $54 \times 7{,}2 = 388{,}8$ ist, so folgt nach §. 24. der Cubikinhalt $= 1555{,}2 : 388{,}8 = 4$ Cubikfuß.

Anmerkung. Bezeichnete die Angabe würtemberger Gewicht, so erhielte man für den Cub.-Inh. $= 1555{,}2 : 50{,}2 \times 7{,}2 = 1555{,}2 : 361{,}44 = 4\frac{3}{10}$ c'.

5) Ein Kupferdraht wiegt 8 Loth, welchen Cubikinhalt besitzt dieser, das specifische Gewicht zu 8,8 gerechnet?

Auflös. Nach §. 24. wird der Cubikinhalt $= \frac{\frac{1}{4}}{54 \times 8{,}8}$ (da 8 Loth $= \frac{1}{4}$ ℔) oder $= 0{,}25 : 475{,}2 = 0{,}000526$ c' oder 526 c'''.

6) Ein Gefäß von Zinn wiegt 2 ℔ 12 Loth, wie groß ist das Volumen des Zinns, wenn das specifische Gewicht desselben = 7 angenommen wird?

Auflös. $54 \times 7 = 378$, folglich das Volumen (§. 24.) $= 2\frac{3}{8} : 378 = 2{,}375 : 378 = 0{,}006283$ c' oder 6 c'' 283 c'''.

Abschnitt V.

Berechnung der Körper.

§. 26. Berechnung des Prismas.

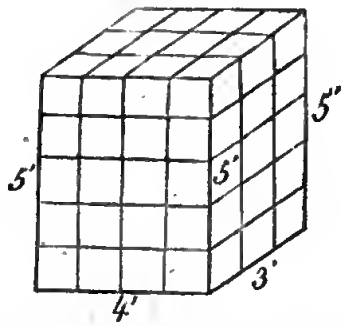
a) Um die ganze Oberfläche eines senkrechten Prismas zu finden, multiplicire man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe des Körpers und addire zum Produkte noch den doppelten Inhalt der Grundfläche.

Der Grund dieses Verfahrens ergibt sich aus der Betrachtung der Netze Fig. 19, 20 und 21.

b) Der Cubikinhalt eines Prismas wird gefunden, wenn man den Inhalt der Grundfläche mit der Höhe (Länge) des Körpers multiplicirt.

Der Grund dieses Verfahrens ist aus folgendem Beispiele zu ersehen.

Fig. 33.



Die Grundfläche des Prismas sei ein Rechteck (Fig. 33.) mit 3′ und 4′ langen Seiten, die Höhe betrage 5′, so ist der Inhalt der Grundfläche = 3 × 4 = 12 □′ und es können somit auf dieser 12 Cubikeinheiten d. h. 12 Würfel je von der Größe eines Cubikfußes neben einander gestellt werden. Da das Prisma 5′ hoch ist, so läßt sich dasselbe als aus 5 Schichten solcher 12 Cubikfuße bestehend denken und sein Cubikinhalt wird also 5 × 12 = 60 Cubikfuß betragen.

Wie hier für das vierseitige, so läßt sich nun leicht aus diesem die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes für das dreiseitige und hieraus für jedes andere vielseitige Prisma nachweisen.

Anmerkung. Aus dem angeführten Beispiele geht hervor, daß der

Cubikinhalt eines vierseitigen Prismas mit rechteckiger Grundfläche auch gefunden werden kann, indem man drei aneinander stoßende Seitenkanten mit einander multiplicirt.

So ist in vorliegendem Falle der Cub. Inhalt $= 4 \times 3 \times 5$ wieder $= 60$ c'.

c) Aus b folgt, daß man bei gegebenem Cubikinhalte und bekannter Höhe den Inhalt der Grundfläche erhält, wenn man mit der Höhe in den Cubikinhalt dividirt, und

d) daß, wenn der Cubikinhalt und die Grundfläche gegeben sind, die Höhe durch Division der Grundfläche in den Cubikinhalt bestimmt wird.

Anmerkung. Für den in der Anmerkung zu *b* gegebenen Fall findet man immer die eine Ausdehnung (Dimension), wenn man mit dem Produkte der beiden andern in den Cubikinhalt dividirt.

§. 27. Beispiele.

Anmerkung. Bei vielen der nachfolgenden Beispielen ist die Auflösung auch nach zwölftheil. Maaßsysteme angegeben, was dann immer durch Vorsetzen von A. n. z. M. angedeutet ist. Wenn nichts bemerkt wurde, so liegt der Auflösung immer das bad. Maaßsystem zu Grunde.

1) Wie groß ist der Cubikinhalt eines Prismas von 7′ 4″ Höhe, dessen Grundfläche ein Fünfeck von 8 □′ 64 □″ Inhalt bildet?

Auflös. Nach §. 26. b. ist der Cubikinhalt $= 8{,}64 \times 7{,}4 = 63{,}936$ c′ oder 63 c′ 936 c″.

A. n. z. M. 8 □′ 64 □″ $= 1216$ □″; 7′ 4′ $= 88$″; folglich Cub.-Inh $= 1216 \times 88 = 107008$ c″ $= 61\frac{2}{3}$ c′.

2) Der Cubikinhalt eines Prismas von quadratischer Basis beträgt 48 c′ 654 c″, seine Höhe mißt 8′ 5″; wie groß ist der Inhalt der Grundfläche, und wie lang ist eine Seite derselben?

Auflös. Nach §. 26. c. ist der Inhalt der Grundfläche $= 48{,}654 : 8{,}5 = 486{,}54 : 85 = 5{,}724$ □′ folglich (nach Thl. I. §. 36. b.) eine Seite dieser $= \sqrt{5{,}724} = 2{,}39'$ oder 2′ 3″ 9‴.

A. n. z. M. 48 c′ 654 c″ $= 83598$ c″; 8′ 5″ $= 101$″; folglich die Grundfläche $= 83598 : 101 = 827{,}7$ □″ und eine Seite $= \sqrt{827{,}7} = 28{,}7'' = 28''\ 8\frac{1}{2}'''$.

3) Ein sechsseitiges Prisma hat einen Cubikinhalt von 364 c′ 72 c″, der Inhalt der Grundfläche beträgt 20 □′ 45 □″; wie hoch ist das Prisma?

Auflöſ. Nach §. 26. d. wird die Höhe = 364,072 : 20,45 = 36407,2 : 2045 = 17,803′ oder 17′ 8″ $\frac{3}{10}$‴.

A. n. z. M. $364\frac{72}{100}$ c′ = 364,0416; $20\frac{45}{144}$ □′ = 20,3125 □′; also Höhe = 364,0416 : 29,3125 = 17,92′ = 17′ 11″.

4) Eine eiserne Stange hat eine Länge von 16′ und einen quadratischen Querschnitt von 8‴ Seite, wie viel wiegt dieselbe, das specifische Gewicht zu 7,2 gerechnet?

Auflöſ. Inhalt der Grundfläche = 0,08′ × 0,08′ = 0,0064 □′, folglich Cub.-Inh. des Eisenstabs (§. 26. b.) = 0,0064 × 16 = 0,1024 c′ also sein Gewicht nach §. 23. = 0,1024 × 54 × 7,2 = 39,81312 ℔ oder 39 ℔ 26 Loth.

A. n. z. M. 16′ = 2304‴; Grundfläche = 64 □‴; Cub.-Inh. = 147456 c‴ = $85\frac{1}{2}$ c″ u. s. w.

5) Wie groß ist der Cubikinhalt eines Prismas von Blei, dessen absolutes Gewicht 8 ℔ 24 Loth beträgt?

Auflöſ. Das specifische Gewicht des Bleis ist 11,36; folglich nach §. 24 (da 54 × 11,36 = 613,44), der Cubikinhalt des Prismas = $8\frac{3}{4}$: 613,44 = 8,75 : 613,44 = 875 : 61344 = 0,014263 c′ oder 14 c″ 263 c‴.

6) Ein 12 Fuß hohes Prisma von Sandstein hat ein regelmäßiges Achteck von 12 Zoll langer Seite zur Grundfläche; wie groß ist die Oberfläche, der Cubikinhalt und das Gewicht desselben?

Auflöſ. Inhalt eines Seitenrechtecks = 1,2 × 12 = 14,4 □′, also Inhalt aller Rechtecke = 14,4 × 8 = 115,2 □′. Inhalt der Grundfläche (nach Thl. I. §. 61. d. da S = 1,2′ ist) = 4,828 × 1,2 × 1,2 = 6,95232 □′, demnach Inhalt beider Grundflächen = 6,95232 × 2 = 13,90464 □′, folglich die Oberfläche des Prismas = 115,2 □′ + 13,90464 □′ = 129,10464 □′ oder 129 □′ 10 □″ $46\frac{1}{2}$ □‴ und der Cubikinhalt = 6,95232 × 12 = 83,42784 c′ oder 83 c′ 427 c″ 840 c‴.

Hieraus nach §. 23. das Gewicht des Körpers, wenn das specifische Gewicht zu 2,5 gerechnet wird

$= 83{,}42784 \times 54 \times 2{,}5 = 11262{,}7584$ ℔

oder 112 Centner $62\frac{3}{4}$ ℔.

7) Eine zwischen zwei Häuser stehende Mauer ist 45′ lang, 8′ hoch und 1′ 6″ breit; wie groß ist die Oberfläche derselben, wie hoch kommt der Anstrich, wenn der Quadratschuh mit 2 Kreuzer bezahlt wird, und was kostet die Aufführung dieser Mauer, wenn man den Cubikfuß mit Arbeitslohn zu 6 Kreuzer rechnet?

Auflös. Inhalt der obern Fläche $= 45 \times 1{,}6 = 72\,\square'$

Inhalt der beiden Seitenflächen

$= 45 \times 8 \times 2 = 720\,\square'$

folglich die Oberfläche der Mauer

$= 720\,\square' + 72\,\square' = 792\,\square'$;

daher kostet der Anstrich 792×2 kr. $= 26$ fl. 24 kr.

Cubikinhalt der Mauer $= 45 \times 1{,}6 \times 8 = 576\,c'$ also

Betrag der Baukosten $= 576 \times 6$ kr. $= 57$ fl. 36 kr.

A. n. z. M. Oberfläche $= 787\frac{1}{2}\,\square'$. Anstrich $= 26$ fl. 15 kr. Cub.-Inh. $= 45 \times 8 \times 1\frac{1}{2} = 540\,c'$. Baukosten $= 54$ fl.

8) Ein Wasserbehälter ist im Lichten 7′ lang, $4\frac{1}{2}$′ breit und 3′ tief; wie viel Maaß Wasser faßt derselbe?

Auflös. Inhalt des Bodens $= 7 \times 4{,}5 = 31{,}5\,\square'$ folglich der Cubikinhalt $= 31{,}5 \times 3 = 94{,}5\,c'$. Da nun eine Maas den achtzehnten Theil eines Cubikfußes ausmacht (Anmerkung 1. zu §. 18), also ein Cubikfuß 18 Maas faßt, so geben 94,5 Cubikfuß $94{,}5 \times 18$ oder 1701 Maas.

9) Es soll ein Keller von der Form eines Prismas gegraben werden. Wie viele Fuhren sind nöthig um die Erde wegzubringen, wenn der Wagen 20 Cubikfuß faßt und der Keller 42′ lang 19′ breit und 15′ hoch werden soll.

Auflös. Cubikinhalt des Kellers, also auch der wegzuschaffenden Erde (§. 26. b. Anmerk.).

$= 42 \times 19 \times 15 = 11970\,c'$,

folglich sind zur Wegbringung nöthig

$11970 : 20 = 599$ Fuhren.

A. n. z. M. Diese wird, da in der Angabe keine Zolle vorkommen, mit obiger Auflösung übereinstimmen.

Warum werden aber in der Wirklichkeit mehr Fuhren nöthig sein, als sich bei der Rechnung ergibt?

10) Es soll ein prismatisches oben offenes Gefäß verfertigt werden, welches 4 Maas Wasser faßt. Wenn dessen Grundfläche ein Quadrat von 4 Zoll Seite bilden soll; wie hoch muß alsdann das Gefäß werden und wie viel Blech ist zur Verfertigung desselben erforderlich?

Auflös. Da eine Maas $\frac{1}{1\,8}$ Cubikfuß ausmacht (§. 18. Anmerkung 1.), so geben 4 Maas $\frac{4}{1\,8}$ oder $\frac{2}{9}$ c′ und da ferner der Inhalt der quadratischen Basis gleich

$$0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16 \square'$$

beträgt, so wird nach §. 26. d., die Höhe des Gefäßes gleich

$$\frac{2}{9} : 0{,}16 = 0{,}22222 : 0{,}16 = 22{,}222 : 16 = 1{,}388'$$

oder 1′ 3″ 8$\frac{1}{3}$‴.

Der Inhalt der vier Seitenflächen ist gleich

$$0{,}4 \times 1{,}388 \times 4 = 2{,}2208 \square';$$

demnach sind zur Verfertigung erforderlich

$$2{,}2208 + 0{,}16 = 2{,}3808 \square'$$

oder 2 □′ 38 □″ 8 □‴ Blech.

11) Eine Mauer von 65 Fuß Länge, 7 Fuß Höhe und 18 Zoll Dicke soll mit Backsteinen aufgeführt werden, von denen jeder 9 Zoll lang, 4$\frac{1}{2}$ Zoll breit und 2 Zoll dick ist (die Lage des Mörtels eingerechnet); wie viel Backsteine sind zur Aufführung erforderlich und wie theuer kommen diese, wenn 100 Stück 2 fl. kosten.

Auflös. Cubikinhalt der Mauer

$$= 65 \times 1{,}8 \times 7 = 819\,c'.$$

Cubikinhalt eines Backsteines =

$$0{,}9 \times 0{,}45 \times 0{,}2 = 0{,}081\,c';$$

folglich sind zur Aufführung nöthig

$$819 : 0{,}081 = 819000 : 81 = 10111 \text{ Backsteine.}$$

Da 100 Stück 2 fl. kosten, so kostet 1 Stück $\frac{2}{1\,0\,0}$ fl. also

$$10111 \text{ Stück } \frac{2 \times 10111}{100} = \frac{20222}{100} = 202\tfrac{1}{5\,0} \text{ fl.}$$

oder 202 fl. 13 kr.

A. n. z. M. Anzahl der Backsteine = 1415232 : 81 = 17472 Stück. Preis = 349$\frac{1}{2\,5}$ fl.

12) Wie viel Quadratfuß Bretter lassen sich aus einem 15 Fuß langen, 2 Fuß dicken und $2\frac{1}{2}$ Fuß hohen Baumstamme schneiden, wenn jedes Brett $1\frac{1}{4}$ Zoll dick werden soll; wie groß ist ferner der Cubikinhalt dieses Stammes und wie theuer kommt derselbe zu stehen, wenn der Cubikfuß mit 26 Kreuzer bezahlt wird?

Auflös. Wird der Stamm parallel zur 2 Fuß langen Seite durchgeschnitten, so liefert derselbe so viele Bretter, als $1\frac{1}{4}$ Zoll in $2\frac{1}{2}$ Fuß enthalten sind. Dieses gibt 20 Stück. Da nun jedes Brett 15 Fuß lang und 2 Fuß breit ist, also einen Flächeninhalt von $15 \times 2 = 30 \square'$ hat, so liefert der Stamm im Ganzen 30×20 oder $600 \square'$ Bretter.

Der Cubikinhalt des Baumstammes ist

$$15 \times 2 \times 2{,}5 = 75\,c'$$

demnach kostet er 75×26 kr. = 32 fl. 30 kr.

Anmerkung. Nimmt man auf den etwa 1‴ breiten wegfallenden Sägeschnitt Rücksicht, so findet man nur 18 bis 19 Bretter.

§. 28. Berechnung des Würfels.

a) Die Oberfläche eines Würfels ist gleich dem sechsfachen Inhalte eines Seitenquadrats.

Vergl. das Netz Fig 15.

b) Umgekehrt findet man die Seite eines Würfels aus der Oberfläche, wenn man diese durch 6 theilt und aus dem Resultate die Quadratwurzel zieht. (Thl. I. §. 36. b.)

c) Um den Cubikinhalt eines Würfels zu finden, multiplicire man die Seite desselben dreimal mit sich selbst.

Betrachtet man nämlich den Würfel als ein vierseitiges Prisma, bei welchem die Höhe, Breite und Länge gleich sind z. B. = 8′, so ist nach der Anmerkung zu §. 26 *b.* der Cubikinhalt $= 8 \times 8 \times 8 = 512\,c'$.

d) Um die Seite eines Würfels zu bestimmen, wenn der Cubikinhalt gegeben ist, hat man nach c, eine Zahl zu suchen, welche dreimal mit sich multiplizirt den Cubikinhalt zum Produkte hat.

Das Auffinden einer solchen Zahl geschieht durch das Ausziehen der Cubikwurzel. Es ist dieses ein besonderes

Rechnungsverfahren, welches zu erklären der Inhalt der nächsten Paragraphen sein soll.

§. 29. Vom Ausziehen der Cubikwurzel.

Multiplicirt man eine Zahl dreimal mit sich selbst, so wird das Produkt die Cubikzahl der ersten Zahl genannt. Der Cubikinhalt eines Würfels stellt also eine solche Cubikzahl vor. Um nun wieder rückwärts die Zahl zu bestimmen, welche nach dreimaliger Multiplikation mit sich selbst eine gegebene Cubikzahl zum Produkte hat, muß man die Cubikwurzel aus dieser Zahl ziehen. Das Geschäft selbst deutet man durch Vorsetzen des Zeichens $\sqrt[3]{}$ vor die Cubikzahl an. So ist z. B. die Cubikzahl von $6 = 6 \times 6 \times 6 = 216$, also umgekehrt $\sqrt[3]{216} = 6$.

Nachstehende Tabelle enthält die Cubikzahlen aller einziffrigen Zahlen, und jedem Lernenden ist es anzurathen, diese dem Gedächtnisse wohl einzuprägen.

Cubikzahl	von	1	=	1
"	"	2	=	8
"	"	3	=	27
"	"	4	=	64
"	"	5	=	125
"	"	6	=	216
"	"	7	=	343
"	"	8	=	512
"	"	9	=	729.

§. 30.

Um die Cubikwurzel aus einer ganzen Zahl z. B. aus 110592 zu ziehen, verfährt man auf folgende Weise:

$\sqrt[3]{110|592|} = 48$

$(4 \times 4 \times 4 =)$ 64

$465(92 : 48 \quad (= 4 \times 4 \times 3)$

$96 \quad (= 4 \times 8 \times 3)$

$(5824 \times 8 =)$ 465 92 $\quad$ 64 $\quad (= 8 \times 8)$

..... $\quad$ 5824

Man theile die Zahl von der Rechten gegen die Linke in dreistellige Classen und bestimme die

zunächſt kleinere Cubikzahl der erſten Claſſe 110. Man findet dafür in vorhergehender Tabelle 64. Ziehe dieſe 64 von der erſten Claſſe 110 ab und ſetze nach dem Gleichheitszeichen die Cubikwurzel von 64 oder 4. An den Reſt 46 hänge man alsdann die folgende Claſſe 592 an und dividire die erhaltene Zahl, nachdem man die zwei letzten Ziffern abgeſtrichen hat, (alſo 465) durch das Produkt, welches erhalten wird, wenn man die zuerſt gefundene Zahl 4 mit ſich und nochmals mit 3 multiplicirt, alſo durch $4 \times 4 \times 3 = 48$. Es gibt aber $465 : 48 = 8$, welche Ziffer 8 als zweite Ziffer nach dem Gleichheitszeichen zu ſchreiben iſt. Nun multiplicire man die gefundene Ziffer 8 mit der vorhergehenden Ziffer 4, gibt 32 und dies nochmals mit 3, gibt 96 und ſchreibe dieſes Reſultat 96 ſo unter 48, daß die letzte Ziffer 6 um eine Stelle gegen die Rechte vorſteht; dann multiplicire man 8 noch mit ſich, gibt 64 und ſchreibe dieſe 64 abermals ſo unter 96, daß wieder die letzte Ziffer um eine Stelle gegen rechts vorſteht, addire hierauf die drei unter einander ſtehenden Zahlen, multiplicire die Summe mit der gefundenen zweiten Ziffer 8 und ziehe das Produkt von 46592 ab. Da die Subtraktion aufgeht, ſo folgt alſo, daß die Cubikwurzel aus $110592 = 48$ ſei.

Anmerkung. Um die Richtigkeit des Reſultats zu prüfen (die Probe zu machen), multiplicire man die gefundene Cubikwurzel 48 dreimal mit ſich, ſo muß wieder die gegebene Cubikzahl 110592 zum Vorſchein kommen. Es iſt in der That wieder $48 \times 48 \times 48 = 110592$, alſo der gefundene Werth richtig.

§. 31.

Iſt die Zahl, aus welcher die Cubikwurzel gezogen werden ſoll, mehr als ſechsziffrig, ſo theile man dieſe ebenfalls von rechts gegen links in dreiſtellige Claſſen und hänge im Reſte, nachdem man zwei Ziffer der zu ſuchenden Zahl gefunden hat, die dritte Claſſe an. Man verfahre alsdann beim Beſtimmen der dritten Ziffer ähnlich wie oben beim Aufſuchen der zweiten, nur nehme man jetzt, ſtatt der erſten Ziffer 4 nach dem Gleichheitszeichen in vorigem Beiſpiele, die ſchon gefundene zweiziffrige Zahl in Rechnung.

Folgendes Beiſpiel wird das Verfahren klar machen.

$\sqrt[3]{335|702|375|} = 695$

$(6 \times 6 \times 6 =)$ 216

1197(02 : 108 $(= 6 \times 6 \times 3)$

162 $(= 6 \times 9 \times 3)$

$(12501 \times 9 =)$ 1125 09 81 $(= 9 \times 9)$

12501

··71933(75 : 14283 $(= 69 \times 69 \times 3)$

1035 $(= 69 \times 5 \times 3)$

$(1438675 \times 5 =)$ 71933 75 25 $(= 5 \times 5)$

····· 1438675

Probe: $695 \times 695 \times 695 = 335702375$.

§. 32.

Geht die Subtraktion zuletzt nicht auf, so hänge man als folgende Classe drei Nullen im Reste an, und trenne die weiter gefundenen Ziffern von den schon bestimmten durch ein Comma. Z. B.

$\sqrt[3]{507|246|} = 79{,}75$

$(7 \times 7 \times 7 =)$ 343

1642(46 : 147 $(= 7 \times 7 \times 3)$

189 $(= 9 \times 7 \times 3)$

$(16671 \times 9 =)$ 1500 39 81 $(= 9 \times 9)$

16671

142 070(00 : 18723 $(= 79 \times 79 \times 3)$

1659 $(= 79 \times 7 \times 3)$

$(1888939 \times 7 =)$ 132 225 73 49 $(= 7 \times 7)$

1888939

9844 270(00 : 1905627 $(= 797 \times 797 \times 3)$

11955 $(= 797 \times 5 \times 3)$

$(190682275 \times 5 =)$ 9534 113 75 25 $(= 5 \times 5)$

310 156 25 190682275

Anmerkung. Um in diesem Falle die Probe zu machen, multiplicire man das Resultat 79,75 dreimal mit sich, und addire zum Produkt noch den Rest 31015625, indem man diesen ohne Rücksicht auf die Decimalstellen von rechts gegen links darunter setzt.

Es ist $79{,}75 \times 79{,}75 \times 79{,}75 = 507214{,}984375$

Hierzu addirt 31015625

gibt wieder 507246,000000

§. 33.

Ist die Cubikwurzel aus einem Decimalbruche zu ziehen, so theile man diesen von dem Comma aus gegen rechts und links in dreistellige Classen und verfahre wie oben gelehrt wurde. In dem Resultate mache man aber, sobald die erste Classe der Decimalstellen heruntergenommen wird, ein Comma.

Bleibt bei dem Eintheilen in dreistellige Classen in den Decimalstellen zuletzt nur eine ein- oder zweiziffrige Classe übrig, so ergänze man diese durch Anhängen von Nullen zur vollständigen Classe.

Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen.

1) $\sqrt[3]{6|543|,728|625|} = 18{,}704$

1

$55(43 : 3 \quad (=1\times1\times3)$

$24 \quad (=1\times8\times3)$

$(604\times8=)\ 48\,32 \quad 64 \quad (=8\times8)$

604

$7\,11\,7(28 : 972 \quad (=18\times18\times3)$

$378 \quad (=18\times7\times3)$

$(101029\times7=)\ 7\,07\,2\,03 \quad 49 \quad (=7\times7)$

101029

$4\,5256(25 : 104907 \quad (=187\times187\times3)$

$45256250(00 : 10490700 \quad (=1870\times1870\times3)$

$22440 \quad (=1870\times4\times3)$

$(1049294416\times4=)\ 41971776\,64 \quad 16 \quad (=4\times4)$

$3284473\,36 \quad 1049294416$

2) $\sqrt[3]{0{,}0000314} = \sqrt[3]{0|,000|031|400|} = 0{,}0315$

$(3\times3\times3=)\ 27$

$44(00 : 27 \quad (=3\times3\times3)$

$9 \quad (=3\times1\times3)$

$(2791\times1=)\ 27\,91 \quad 1 \quad (=1\times1)$

2791

$16\,090(00 : 2883 \quad (=31\times31\times3)$

$465 \quad (=31\times5\times3)$

$(292975\times5=)\ 14\,648\,75 \quad 25 \quad (=5\times5)$

$1\,441\,25 \quad 292975$

§. 34.

Wenn die Cubikwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche zu ziehen ist, so verwandelt man am einfachsten diesen in einen Decimalbruch und zieht hieraus nach §. 33. die Cubikwurzel. Z. B.

$$\sqrt[3]{38\tfrac{11}{16}} = \sqrt[3]{38,6875} = \sqrt[3]{38|,687|500|} = 3,38$$

27

11 6(87 : 27

27

8 9 37 | 9

2979

2 7 505(00 : 3267

792

2 6 774 72 | 64

730 28 | 334684

u. s. w.

§. 35. Aufgaben.

Löset folgende Beispiele:

a) $\sqrt[3]{3375}$; b) $\sqrt[3]{24389}$; c) $\sqrt[3]{592704}$; d) $\sqrt[3]{15438249}$;
e) $\sqrt[3]{248,858189}$; f) $\sqrt[3]{0,000672221376}$; g) $\sqrt[3]{4,72}$;
h) $\sqrt[3]{716}$; i) $\sqrt[3]{4257,38546}$; k) $\sqrt[3]{\frac{11}{32}}$; l) $\sqrt[3]{364\frac{5}{6}}$;
m) $\sqrt[3]{17\frac{1}{64}}$.

Resultate. a) 15; b) 29; c) 84; d) 249; e) 6,29; f) 0,0876; g) 1,6774; h) 8,9461; i) 16,2074; k) 0,70051; l) 7,1454; m) 2,57207..

§. 36.

Beispiele über die Berechnung des Würfels.

1) Wie groß ist die Oberfläche und der Cubikinhalt eines Würfels, dessen Seite 3′ 8″ lang ist?

Auflösung. Inhalt eines Seitenquadrats $= 3{,}8 \times 3{,}8 = 14{,}44\,\square'$; folglich nach §. 28. a. die Oberfläche $= 14{,}44\,\square' \times 6 = 86\,\square'\,64\,\square''$ und nach §. 28. c. der Cubikinhalt $= 3{,}8 \times 3{,}8 \times 3{,}8 = 54{,}872\,c'$ oder $54\,c'\,872\,c''$.

A. n. z. M. Oberfläche $= 80\,\square'\,96\,\square''$; Cubikinhalt $= 49\,c'\,512\,c'''$.

2) Man kennt den Flächeninhalt des Seitenquadrats eines Würfels gleich $13\,\square'\,24\,\square''\,96\,\square'''$; wie groß ist der Cubikinhalt dieses Würfels?

Auflösung. Die Seite des Quadrats ist (Thl. I. §. 36. b.) $= \sqrt{13{,}2496} = 3{,}64'$; also der Cubikinhalt nach §. 28. c. $= 3{,}64 \times 3{,}64 \times 3{,}64 = 48{,}228544\,c'$ oder $48\,c'\,228\,c''\,544\,c'''$.

A. n. z. M. Seite $= \sqrt{273120} = 522\,c'''$. Cubikinhalt $= 47\,c'\,1289\,c''$.

3) Der Cubikinhalt eines Würfels beträgt $418\,c'\,508\,c''\,992\,c'''$; wie groß ist eine Seite und die Oberfläche desselben?

Auflösung. Nach §. 28. d. ist die Seite $= \sqrt[3]{418{,}508992} = 7{,}48'$ oder $7'\,4''\,8'''$; folglich nach §. 28. a. die Oberfläche $= 7{,}48 \times 7{,}48 \times 6 = 335{,}7024\,\square'$ oder $335\,\square'\,70\,\square''\,24\,\square'''$.

A. n. z. M. Seite $= \sqrt[3]{1249020128\,c'''} = 1076{,}9''' = 7'\,5''\,8\frac{9}{10}'''$.

4) Die Seite eines Würfels von Marmor mißt $2'\,5''$; wie groß ist das Gewicht desselben?

Auflös. Cubikinhalt $= 2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 = 15{,}625\,c'$ folglich das Gewicht, wenn das spec. Gewicht des Marmors $= 2{,}7$ gesetzt wird $= 15{,}625 \times 54 \times 2{,}7 = 2278{,}125\,\text{℔}$ oder 22 Ctr. $78\frac{1}{8}\,\text{℔}$.

A. n. z. M. Legt man hierbei das preuß. Maaß- und Gewichtssystem zu Grunde, wie dies für solche Fälle immer geschehen soll, so folgt: Cubikinhalt $= 24389\,c''$; also das Gewicht $= \frac{66 \times 24389 \times 2{,}7}{1728}$ $= 2515\,\text{℔}$.

5) Es soll ein 2 Centner schwerer Würfel von Eisen gegossen werden; wie groß muß eine Seite desselben werden?

Auflösung. Nach §. 21. ist der Cubikinhalt $= \frac{200}{54 \times 7{,}2}$

$= \frac{200}{388{,}8} = 0{,}5144032$ also nach §. 28. d. eine Seite

$= \sqrt[3]{0{,}5144032} = 0{,}801'$ oder $8'' \frac{1}{10}'''$.

A. n. z. M. 2 Ctr. (preuß.) $= 220$ Z. Cb.-Inh. $= \frac{220}{66 \times 7{,}2} = 0{,}4629$ c′.

Seite $= \sqrt[3]{0{,}4629} = 0{,}77' = 9\frac{1}{4}''$.

6) Der hohle Raum eines Behälters soll die Form eines Würfels haben und genau 100 Maas fassen; wie groß muß eine Seite dieses Raumes werden?

Auflösung. 18 Maas geben einen Cubikfuß (§. 18.) folglich 100 Maas $\frac{100}{18}$ oder $5\frac{5}{9}$ Cubikfuß, also wird die Seite nach §. 28. d. $= \sqrt[3]{5\frac{5}{9}}$ oder $\sqrt[3]{5{,}5555555} = 1{,}77'$ oder $1'\ 7''\ 7'''$.

7) Aus drei Würfeln, deren Seiten 6″, 8″ und 9″ lang sind, wird ein Würfel gefertigt; wie groß wird die Seite dieses Würfels?

Aufl. Cub.-Inh. des ersten Würfels $= 6 \times 6 \times 6 = 216$ c″
" " " zweiten " $= 8 \times 8 \times 8 = 512$ c″
" " " dritten " $= 9 \times 9 \times 9 = 729$ c″
$= 1457$ c″

folglich der Cubikinhalt des in Frage stehenden Würfels $= 1457$ c″ oder $1{,}457$ c′; also die Seite $= \sqrt[3]{1{,}457} = 1{,}133'$ oder $1'\ 1''\ 3\frac{3}{10}'''$.

A. n. z. M. Seite $= \sqrt[3]{1457} = 11{,}33'' = 11''\ 3\frac{33}{33}'''$.

8) Man soll aus 3 □′ 84 □″ Blech einen Würfel verfertigen; wie groß wird eine Seite und der Cubikinhalt desselben?

Auflösung. Wenn die Oberfläche $= 3{,}84$ □′ beträgt, so enthält eine Seitenfläche $= 3{,}84 : 6 = 0{,}64$ □′; folglich wird eine Seite $= \sqrt{0{,}64} = 0{,}8' = 8''$ und der Cubikinhalt $= 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}512$ c′ oder 512 c″.

A. n. z. M. Seite $= \sqrt{86} = 9{,}27''$. Cubikinhalt $= 797{,}22$ c″ $=$ 797 c‴ 380 c‴.

9) Aus 2 eisernen Würfeln von 4″ und 5″ Seite, soll ein Würfel gegossen werden; welches Gewicht erhält dieser und wie groß wird eine Seite desselben? (Spec. Gew. = 7,2)

Auflösung.

Cub.-Inh. des ersten Würfels $= 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}064\ c'$
„ „ „ zweiten „ $= 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125\ c'$
„ „ „ zu verfertigenden Würfels $= 0{,}189\ c'$

also eine Seite desselben $= \sqrt[3]{0{,}189} = 0{,}57'$ und sein Gewicht $= 0{,}189 \times 54 \times 7{,}2 = 73{,}4832\ \mathfrak{B}$.

10) Die Seite eines Würfels betrage 4′; wie groß wird der Cub.-Inhalt eines Würfels von doppelter, drei- und vierfacher Seite?

Auflösung.

C.-Inh. d. Würfels von 4′ Seite $= 4 \times 4 \times 4 = 64c'$
„ „ „ „ $2 \times 4 = 8'$ „ $= 8 \times 8 \times 8 = 512c'$
„ „ „ „ $3 \times 4 = 12'$ „ $= 12 \times 12 \times 12 = 1728c'$
„ „ „ „ $4 \times 4 = 16'$ „ $= 16 \times 16 \times 16 = 4096c'$

Anmerkung. Man ersieht hieraus, daß der Cubikinhalt (somit auch das Gewicht) eines Würfels nicht in demselben Verhältnisse größer wird, wie die Seite, sondern daß bei doppelter Seite der Inhalt 8 ($= 2 \times 2 \times 2$) mal, bei dreifacher schon 27 ($= 3 \times 3 \times 3$) mal, bei vierfacher 64 ($= 4 \times 4 \times 4$) mal größer wird, als der Inhalt bei einfacher Seite. Es ist nämlich $512 = 8 \times 64$; $1728 = 27 \times 64$ und $4096 = 64 \times 64$.

Die Zahlen 8, 27, 64 sind aber keine andere, als die Cubikzahlen von 2, 3, 4 (§. 29). Man sagt daher auch: die Würfel verhalten sich dem Cub.-Inhalte und somit auch dem Gewichte nach (wenn die Materie die nämliche bleibt), wie die Cubikzahlen ihrer Kanten.

Hat z. B. der Würfel *A* eine 6mal größere Seite, wie der Würfel *B*, so ist sein Cubikinhalt nicht 6 mal, wie man leicht versucht wird zu glauben, sondern $6 \times 6 \times 6 = 216$ mal größer. Vergleiche die Anmerkung zur Aufg. 9 in §. 48.

§. 37.

Berechnung der vollständigen Pyramide.

a) Der Inhalt des Mantels einer regelmäßigen Pyramide

wird erhalten, wenn man den Inhalt eines Seitendreiecks mit der Anzahl der Seiten der Grundfläche multiplicirt.

Ist die Pyramide eine unregelmäßige, so rechne man den Inhalt eines jeden Seitendreiecks besonders und addire dann diese Inhalte.

b) Soll die ganze Oberfläche bestimmt werden, so zähle man zu dem in a) gefundenen Mantel, noch den Inhalt der Grundfläche.

c) Um den Cubikinhalt einer Pyramide zu finden, multiplicire man den Inhalt der Grundfläche mit der Höhe und dividire das Produkt durch 3.

d) Sind der Cubikinhalt und die Höhe einer Pyramide gegeben, so findet man den Inhalt der Grundfläche, wenn man den dreifachen Cubikinhalt durch die Höhe dividirt.

e) Um die Höhe zu berechnen, wenn der Cubikinhalt und die Grundfläche bekannt sind, dividire man mit dem Inhalt der Grundfläche in den dreifachen Cubikinhalt.

§. 38. Beispiele.

1) Wie groß ist die ganze Oberfläche einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide, wenn die Seite der Grundfläche 4 Fuß lang ist und die Höhe eines Seitendreiecks (d. i. die Senkrechte, welche man von der Spitze der Pyramide auf die Seite der Grundfläche fällt) 8 Fuß beträgt?

Auflösung. Inhalt eines Seitendreiecks $= \frac{4 \times 8}{2}$ $= 16 \square'$ (Thl. I. §. 46. a.); folglich nach §. 37. a. der Mantel $= 16 \times 5 = 80 \square'$.

Nach Thl. I. §. 61. d. wird der Inhalt der Grundfläche $= 1{,}72 \times 4 \times 4 = 27 \square' 52 \square''$; also die ganze Oberfläche nach §. 37. b. $\doteq 80 \square' + 27 \square' 52 \square'' = 107 \square' 52 \square''$

A. n. z. M. Diese stimmt mit der gegebenen überein.

2) Eine sechsseitige Pyramide hat eine Grundfläche von $25 \square' 26 \square''$ Inhalt und eine Höhe von $8' 5''$; wie groß ist der Cubikinhalt?

Auflösung. Nach §. 37 c. wird der Cubikinhalt $= \frac{25{,}26 \times 8{,}5}{3} = 71{,}57\,c'$ oder $71\,c'\ 570\,c''$.

A. n. z. M. $25\,\square'\ 26\,\square'' = 3626\,\square''$; $8'\ 5'' = 101''$; Cubikinhalt $= \frac{3626 \times 101}{3} = 122075\frac{1}{3}\,c'' = 70\,c'\ 1115\frac{1}{3}\,c''$.

3) Der Cubikinhalt einer regelmäßigen Pyramide mit quadratischer Basis beträgt $58\,c'\ 900\,c''$ und die Höhe $9'\ 5''$; wie groß ist der Inhalt der Grundfläche und eine Seite derselben?

Auflösung. Nach §. 37. d. wird der Inhalt der Grundfläche $= \frac{58{,}9 \times 3}{9{,}5} = 18{,}6\,\square'$; also eine Seite derselben $= \sqrt{18{,}6} = 4{,}312' = 4'\ 3''\ 1\frac{1}{2}'''$.

4) Wie hoch ist eine Pyramide von $598\,c'$ Inhalt, wenn die Grundfläche $48\,\square'\ 25\,\square''$ beträgt?

Auflösung. Nach §. 37. e. wird die Höhe $= \frac{598 \times 3}{48{,}25} = \frac{1794}{48{,}25} = 37{,}18'$ oder $37'\ 1''\ 8'''$.

A. n. z. M. Höhe $= \frac{1033344 \times 3}{6937} = 446{,}88'' = 37'\ 2\frac{1}{2}''$.

5) Der Mantel einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide soll angestrichen werden. Wie theuer kommt der Anstrich, den Quadratschuh zu 2 kr. gerechnet, wenn die Seite der Basis $3'\ 4''$ und die Höhe eines Seitendreiecks $18'\ 2''$ mißt?

Aufl. Mantel (nach §. 37. a.) $= \frac{3{,}4 \times 18{,}2}{2} \times 6 = 185{,}64\,\square'$; diese kosten anzustreichen $185{,}64 \times 2$ kr. oder 6 fl. 11 kr.

6) Welches Gewicht hat eine regelmäßige vierseitige Pyramide, wenn eine Seite der Basis $= 7'$ und die Höhe $= 12'$; das spec. Gewicht zu 2,5 gerechnet?

Auflös. Inhalt der quadratischen Grundfläche $= 49\,\square'$, also der Cubikinhalt (§. 37. c.) $= \frac{49 \times 12}{3} = 196\,c'$;

demnach das Gewicht (§. 23) = 196 × 54 × 2,5 = 26460 ℔ oder 264 Ctr. 60 ℔.

A. n. z. M. Gewicht = 196 × 66 × 2,5 = 32340 ℔. oder 294 Ctr.

7) Eine Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat von 4″ Seite bildet, wiegt 48⅗ ℔; wie hoch ist dieselbe, wenn das spec. Gewicht 7,2 beträgt?

Auflösung. Der Cubikinhalt ist nach §. 24. $= \frac{48,6}{54 \times 7,2}$ = 0,125 c′, der Inhalt der Grundfläche = 0,4 × 0,4 = 0,16 □′, also nach §. 37. e. die Höhe $= \frac{3 \times 0,125}{0,16} =$ 2,31′ = 2′ 3″ 4‴.

§. 39.

Berechnung der abgekürzten Pyramide.

a) Der Inhalt des Mantels ist gleich der Summe der Inhalte der Seitenflächen.

Diese Seitenflächen bilden aber Paralleltrapeze und werden also nach Thl. I. §. 54. berechnet.

Ist die Pyramide regelmäßig, so bestimme man den Inhalt eines solchen Paralleltrapezes und multiplicire diesen mit der Anzahl der Seiten der Grundfläche um den Mantel zu erhalten.

b) Der Inhalt der ganzen Oberfläche wird gefunden, wenn man zu dem nach a. bestimmten Mantel noch die Inhalte der beiden Grundflächen addirt.

c) Die genaue Bestimmung des Cubikinhaltes einer abgekürzten Pyramide geschieht nach einer mittelst Hilfe der Buchstabenrechnung abgeleiteten Formel.

Bezeichnet nämlich G den Inhalt der größeren Grundfläche, g den Inhalt der kleineren Grundfläche und h den senkrechten Abstand beider (die Höhe); so ist immer der Cubikinhalt =

$$\frac{(G + g + \sqrt{G \times g}) \times h}{3}$$

Diese Formel sagt uns also:

Der Cubikinhalt einer abgekürzten Pyramide wird erhalten,

wenn man den Inhalt der größern Grundfläche, den Inhalt der kleinern Grundfläche, und die Quadratwurzel aus dem Produkte dieser beiden Inhalte zusammenzählt, die erhaltene Summe mit der Höhe multiplicirt und das Produkt durch 3 dividirt.

Bilden die beiden Grundflächen Quadrate, welcher Fall im Praktischen wohl am häufigsten vorkommt, so verwandelt sich das eben ausgesprochene Verfahren in nachstehendes:

Man multiplicire die Seite des obern Quadrats mit sich, dann die Seite des untern mit sich, dann die Seite des obern mit der des untern, addire hierauf diese drei Produkte, multiplicire die Summe mit der Höhe und dividire das Produkt durch 3, um den Cubikinhalt zu finden.

Wie läßt sich dieses Verfahren aus dem oben angeführten allgemeinen Satze nachweisen?

Anmerkungen.

1) Wenn bei der Berechnung keine allzu genaue Lösung verlangt wird, so kann der Cubikinhalt auch auf folgende Weise bestimmt werden:

Man rechne die Inhalte der beiden Grundflächen, zähle diese zusammen, multiplicire die Summe mit der Höhe und dividire das Produkt durch 2.

Dieses Verfahren liefert besonders dann Resultate von hinreichender Genauigkeit, wenn die Inhalte der beiden Grundflächen nur wenig von einander verschieden sind, wie z. B. bei Berechnung von Baumstämmen und dergl. und kann daher im Praktischen oft mit großem Vortheile angewendet werden.

2) Die Bestimmung der übrigen Stücke einer abgekürzten Pyramide setzt einige Kenntnisse der Algebra voraus und kommt zudem im gewöhnlichen Leben fast nie oder doch nur äußerst selten vor. Es sollen hier nur einige Fälle durch Formeln ausgesprochen werden, von welchen vorkommenden Falles von Solchen, denen diese Darstellungsweise nicht ganz fremd ist, mit Vortheil Gebrauch gemacht werden kann.

Wird die oben angeführte Bedeutung der Buchstaben G, g und h beibehalten und bezeichnet C den Cubikinhalt, so ist:

$$1)\ h = \frac{3 \times C}{(G + g + \sqrt{G \times g})}$$

$$2)\ G = \frac{(g \times h - 6\,C) - \sqrt{(4\,C - g \times h) \times 3 \times g \times h}}{2\,h}$$

$$3)\ g = \frac{(6\,C - G \times h) - \sqrt{(4\,C - G \times h) \times 3 \times G \times h}}{2\,h}$$

§. 40. Beispiele.

1) Wie groß ist der Mantel und die ganze Oberfläche einer abgekürzten regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn die Seiten der untern Grundfläche 3′ 8″, die der obern 2′ 4″ lang sind, und die Höhe einer Seitenfläche 8′ 5″ beträgt?

Auflösung. Der Inhalt eines Seitenparalleltrapezes ist $= \frac{3{,}8 + 2{,}4}{2} \times 8{,}5 = 26{,}35\,\square'$ (s. Thl. I. §. 54. a.)

folglich nach §. 39. a.

der Mantel . . $= 26{,}35\,\square' \times 4 = 105\,\square'\,40\,\square''$

der Inhalt des größern Quadrats $= 3{,}8 \times 3{,}8 = 14\,\square'\,44\,\square''$

der Inhalt des kleinern Quadrats . $= 2{,}4 \times 2{,}4 = 5\,\square'\,76\,\square''$

demnach die ganze Oberfläche (§. 39. b) $= 125\,\square'\,60\,\square''$

2) Man kennt von einer abgekürzten Pyramide den Inhalt der untern Grundfläche $= 16\,\square'$, den Inhalt der obern Grundfläche $= 9\,\square'$, und die Höhe der Pyramide $= 8'\,7''$; wie groß ist der Cubikinhalt?

Auflösung. Um ein genaues Resultat zu erlangen, setze man in der in §. 39. c. aufgestellten Formel, für G den Zahlenwerth 16, für $g = 9$, für $\sqrt{G \times g} = \sqrt{16 \times 9}$ $\sqrt{144} = 12$, und für $h = 8{,}7$; dann wird der Cubikinhalt $= \frac{(16 + 9 + 12) \times 8{,}7}{3} = \frac{37 \times 8{,}7}{3} =$ 107,3 c′ oder 107 c′ 300 c″.

Genügt ein annäherndes Resultat, so wende man das in der Anmerkung 1. zu §. 39. c. angeführte Verfahren an. Die Summe der Inhalte beider Grundflächen wird $= 16 + 9 = 25$, mit der Höhe 8,7 multiplicirt gibt $25 \times 8{,}7 = 217{,}5$; hiervon die Hälfte gibt den Cubikinhalt $= 108{,}75$ c′ oder 108 c′ 750 c″; ein Resultat, welches nur um 1 c′ 450 c″ zu groß ist.

A. n. z. M. Cubikinhalt $= \frac{(2304 + 1296 + \sqrt{2304 \times 1296}) \times 103}{3}$

$= 182928\,c'' = 105\,c'\,1488\,c''$.

3) Ein 26 Fuß langer Baumstamm ist nach einer vierseitigen

abgestumpften Pyramide behauen. Die Grundflächen bilden Rechtecke. An dem einen Ende ist er 2′ 2″ hoch und 1′ 5″ dick, an dem andern 1′ 4″ hoch und 9½″ dick; wie groß ist der Cubikinhalt und was kostet der Stamm, wenn für den Cubikfuß 54 kr. bezahlt werden?

Auflösung. Da hier die Länge beträchtlich, der Unterschied beider Grundflächen aber nur gering ist, so wird zur Berechnung mit Vortheil die in der Anmerkung zu §. 39 c. angeführte Annäherungsmethode angewendet.

Es wird der Inhalt des
größern Querschnitts $= 2{,}2 \times 1{,}5 = 3{,}3\,\square'$
der Inhalt des kleinern „ $= 1{,}4 \times 0{,}95 = 1{,}33\,\square'$
also die Summe beider $= 4{,}63\,\square'$

demnach der Cubikinhalt $= \frac{4{,}63 \times 26}{2} = 60{,}19\ c'$;

folglich der Preis des Stammes $= 60{,}19 \times 54$ kr. $=$ 54 fl. 10 kr.

Nach der in §. 39. c. angegebenen Formel wird der Cubik-Inhalt $= \frac{(3{,}3 + 1{,}33 + \sqrt{3{,}3 \times 1{,}33}) \times 26}{3} = 58{,}24\,c'$

also der Preis des Stammes $= 58{,}24 \times 54$ kr. $=$ 52 fl. 40 kr. Beide Resultate sind demnach um 1 fl. 30 kr. verschieden.

§. 41. Berechnung des Cylinders (Walze).

a) Um die krumme Oberfläche d. i. den Mantel eines Cylinders*) zu finden, multiplicire man den Umfang desselben mit seiner Höhe.

Der Grund dieses Verfahrens ergibt sich leicht aus der Anschauung des Netzes im §. 14; der Mantel erscheint nämlich dort als ein Rechteck, dessen Grundlinie durch den Umfang und dessen Höhe durch die Höhe des Cylinders bestimmt werden. Der Inhalt dieses Rechteckes wird also zugleich der Inhalt der krummen Oberfläche sein.

*) Hier sowohl als bei dem Kegel ist immer nur von senkrechten Körpern mit kreisförmiger Grundfläche die Rede.

b) Ist die ganze Oberfläche zu berechnen, so hat man noch zu dem nach a. bestimmten Mantel die Inhalte der beiden Grundflächen (Kreise) zu addiren.

c) Der Cubikinhalt eines Cylinders wird erhalten, wenn man den Inhalt der Grundfläche mit der Höhe desselben multiplicirt.

Der Grund dieses Verfahrens ergibt sich aus §. 4. und §. 26. b.

Aus c. fließen unmittelbar folgende 2 Sätze:

d) Dividirt man den Cubikinhalt durch die Höhe, so erhält man den Inhalt der Grundfläche, und

e) Wird mit dem Inhalt der Grundfläche in den Cubikinhalt des Cylinders dividirt, so findet man dessen Höhe.

f) Die Berechnung des Cubikinhaltes eines hohlen Cylinders kann auf folgende 2 Arten geschehen:

1) Man rechne zuerst den Inhalt des ganzen Cylinders und ziehe hiervon den Cubikinhalt des hohlen Raumes ab; oder

2) Man rechne den Inhalt der ringförmigen Grundfläche und multiplicire diesen mit der Höhe des Cylinders.

§. 42. Beispiele.

1) Der Umfang eines Cylinders beträgt 5′ 4″ 2‴ und die Höhe 8′ 4″; wie groß ist die krumme Oberfläche?

Auflösung. Diese wird nach §. 41. a. = 5,42 × 8,4 = 45,528 □′ oder 45 □′ 52 □″ 80 □‴.

A. n. z. M. Krumme Oberfläche = 770 × 1200 = 924000 □‴ = 44 □′ 80 □″ 96 □‴.

2) Der Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders ist 2′ 5″ lang, dessen Höhe beträgt 12′ 8″; wie groß ist die ganze Oberfläche und der Cubikinhalt?

Auflösung. Der Umfang wird (Thl. I. §. 63. a.) = 2 × 2,5 × 3,14 = 15,7′, also nach §. 41. a. der Mantel

$= 15{,}7 \times 12{,}8 \ldots\ldots\ldots = 200{,}96\ \square'$
Die Inhalte der beiden Grundflächen machen (Thl. I. §. 63. c. 2.) $= 2{,}5 \times 2{,}5 \times 3{,}14 \times 2 \ldots\ldots\ldots = 39{,}25\ \square'$
folglich wird nach §. 41. b. die ganze Oberfläche $\ldots\ldots\ldots\ldots = 240{,}21\ \square'$
Da ferner der Inhalt der Grundfläche $= 19{,}625\ \square'$ ist, so wird nach §. 41. c. der Cubikinhalt $= 19{,}625 \times 12{,}8 = 251{,}2\ c'$ oder $251\ c'\ 200\ c''$.

A. n. z. M. Umfang $= 182{,}12''$. Mantel $= 27682{,}24''$. Beide Grundflächen $= 5281{,}48\ \square'$. Ganze Oberfläche $= 32963\ \square'' = 228\ \square'\ 131\ \square''$. Cubikinhalt $= 232\ c'\ 496\ c''$.

3) Wie groß ist der Durchmesser und der Umfang eines $14'\ 8''$ hohen Cylinders, wenn dessen Cubikinhalt $540\ c'\ 200\ c''$ beträgt?

Auflös. Der Inhalt der Grundfläche ist nach §. 41. d. $= 540{,}2 : 14{,}8 = 56{,}5\ \square'$, demnach der Halbmesser (nach Thl. I. §. 63. d.) $= \sqrt{\frac{36{,}5}{3{,}14}} = \sqrt{11{,}6242} = 3{,}409$
und der Durchmesser $= 3{,}409 \times 2 = 6{,}818'$ also (Thl. I. §. 63. a.) der Umfang des Cylinders $= 6{,}818 \times 3{,}14 = 21{,}40852'$.

4) Der Umfang eines Cylinders beträgt $26'\ 6''\ 9'''$, die Höhe desselben $15'\ 4''$; wie groß ist der Inhalt der Grundfläche und der Cubikinhalt des Körpers?

Auflös. Der Durchmesser wird (nach Thl. I. §. 63. b.) $= 26{,}69 : 3{,}14 = 8{,}5'$, daher der Halbmesser $= 4{,}25'$ und der Inhalt der Grundfläche (Thl. I. §. 63. c. 1) $= \frac{26{,}69 \times 4{,}25}{2} = 56{,}71625\ \square'$; also der Cubikinhalt $= 56{,}71625 \times 15{,}4 = 873{,}43025\ c'$ oder $873\ c'\ 430\frac{1}{4}\ c''$

5) Es sollen runde Eisenstangen geschmiedet werden, von welchen jeder laufende Fuß $\frac{1}{2}$ ℔ wiegt; wie dick müssen diese werden?

Auflös. Das spec. Gew. des Schmiedeisens beträgt 7,8; also ist der Cubikinhalt des laufenden Fußes dieser Stangen nach §. 24. $= \frac{\frac{1}{2}}{54 \times 7{,}8} = \frac{0{,}5}{421{,}2} = 0{,}001187\ c'$.

Folglich der Inhalt des Querschnitts nach §. 41. d. = 0,001187 : 1 = 0,001187 □′ und (Thl. I. §. 63. d.) der Halbmesser $= \sqrt{\frac{0{,}001187}{3{,}14}} = \sqrt{0{,}000378} = 0{,}0194'$; hieraus endlich der Durchmesser oder die Dicke = 0,0194′ × 2 = 0,0388′ oder 3‴ 8⅓⁗.

6) Ein cylinderförmiger Becher, welcher eine Maas fassen und 1′ 4″ hoch werden soll, muß welche Weite haben?

Auflös. Da ein Cubikfuß 18 Maas faßt, so muß der Cubikinhalt dieses Bechers $\frac{1}{18}$ Cubikfuß werden. Nach §. 41. d. wird also der Inhalt der Grundfläche $\frac{1}{18} : 1{,}4 = 0{,}05555 : 1{,}4 = 0{,}03928$□′, daher der Halbm. $= \sqrt{\frac{0{,}03928}{3{,}14}} = \sqrt{0{,}012509} = 0{,}111'$ und der Durchmesser oder die Weite = 0,111 × 2 = 0,222′ oder 2″ 2⅔‴.

7) Ein runder überall gleich dicker Baumstamm hat einen Umfang von 8′ 4″ und eine Länge von 35 Fuß; was kostet derselbe, wenn für den Cubikfuß 12 Kreuzer verlangt werden?

Auflös. Der Durchmesser des Stammes ist (nach Thl. I. §. 63. b.) = 8,4 : 3,14 = 2,674′, also der Halbmesser = 2,674 : 2 = 1,337′ und der Inhalt des Querschnitts (Thl. I. §. 63. c. 2) = 1,337 × 1,337 × 3,14 = 5,612966 □′; folglich der Cubikinhalt nach §. 41. c. = 5,612966 × 35 = 196,453810 c′. Der Stamm kostet demnach 196,45381 × 12 kr. oder 39 fl. 17 kr.

A. n. z. M. Halbmesser = 15″ 11‴. Cubikinhalt = 193½ c′ (nahezu). Preis des Stammes = 38 fl. 42 kr.

8) Eine Brunnenleitung, aus bleiernen Röhren bestehend, hat eine Länge von 4564 Fuß. Der äußere Durchmesser der Röhren beträgt 2½ Zoll und die Weite der Oeffnung 2″ 2‴ wie theuer kommt diese Leitung zu stehen, wenn das Pfund Blei zu 10 kr. berechnet wird?

Auflös. Der Halbmesser des ganzen Querschnitts ist = 2½ : 2 = 1¼ Zoll oder 0,125 Fuß, folglich sein Inhalt (Thl. I. §. 63. c. 2.) 0,125 × 0,125 × 3,14 = 0,0490625 □′; also der Cubikinhalt der Röhren sammt dem hohlen Raume = 0,0490625 × 4564 = 223,92125 c′.

Der Halbmesser der Oeffnung ist $0{,}22' : 2 = 0{,}11'$, also ihr Flächeninhalt $= 0{,}11 \times 0{,}11 \times 3{,}14 = 0{,}037994\,\square'$ und der Cubikinhalt des hohlen Raumes $= 0{,}037994 \times 4564 = 173{,}404616\,c'$. Nach §. 41. f. 1. erhält man hieraus für das Volumen des Bleies: $223{,}92125\,c' - 173{,}404616\,c' = 50{,}516634\,c'$. Diese wiegen aber nach §. 23, wenn das spec. Gew. zu 11,4 angenommen wird, $= 50{,}516634 \times 54 \times 11{,}4 = 31098$ Pfund.

Die Kosten der Leitung betragen somit 31098×10 kr. oder 5183 fl.

Nach der in §. 41. f. 2. angegebenen Methode hat man: Inhalt des ringförmigen Querschnitts $= 0{,}0490625 - 0{,}037994 = 0{,}0110685\,\square'$, diesen multiplicirt mit der Länge 4564 gibt für den Cubikinhalt 50,516634 c' u. s. w. wie oben.

9) Wie viel wiegt eine eiserne 12 Fuß lange Röhre, deren äußerer Durchmesser 8 Zoll mißt, wenn die Eisendicke $1\frac{1}{2}$ Zoll beträgt und das spec. Gew. des Eisens $= 7{,}2$ ist?

Auflösung. Der Cubikinhalt des ganzen Cylinders $= 0{,}5024 \times 12 = 6{,}0288\,c'$

Der Cubikinhalt des hohlen Raumes, da der Halbmesser $= 4 - 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ Zoll ist $= 0{,}19625 \times 12 = 2{,}355c'$; folglich der Cubikinhalt der Eisenmasse $= 3{,}6738c'$, also das Gewicht derselben $= 3{,}6738 \times 54 \times 7{,}2 = 14$ Ctr. $28\frac{3}{10}$ ℔.

10) Wie viel Quadratfuß Blech ist zur Verfertigung einer cylindrischen Kanne erforderlich, welche 10 Maas fassen und $2\frac{1}{2}$ Fuß hoch werden soll?

Auflös. Da 18 Maas einen Cubikfuß ausmachen, so geben 10 Maas $\frac{10}{18}$ oder $\frac{5}{9} = 0{,}5555\ldots$ Cubikfuß. Der Inhalt der Grundfläche wird daher nach §. 41. d. $= 0{,}5555 : 2{,}5 = 5{,}5555 : 25 = 0{,}2222$ Quadratfuß und ihr Halbmesser (nach Thl. I. §. 63. d.) $= \sqrt{\frac{0{,}2222}{3{,}14}} = \sqrt{0{,}0707}$ $= 0{,}26$; folglich der Durchmesser $= 0{,}52'$ und (Thl. I. §. 63. a.) der Umfang $= 0{,}52 \times 3{,}14 = 1{,}6328'$. Nach

§. 41. a. wird hieraus der Inhalt des Mantels = 1,6328 × 2,5 = 4,082 □′. Hierzu die Grundfläche addirt gibt die Größe des erforderlichen Blechs = 4,3042 □′ oder 4 □′ 30 □″ 42 □‴.

§. 43. Berechnung des vollständigen Kegels.

a) Um den Mantel eines Kegels zu erhalten, multiplicire man den Umfang des Grundkreises mit der Seite des Kegels und dividire das Product durch 2.

Der Grund des Verfahrens ergibt sich aus der Anschauung des Netzes §. 15. Es erscheint dasselbe nämlich als ein Kreisausschnitt, dessen Bogen gleich dem Umfange der Grundfläche und dessen Radius gleich der Seite des Kegels ist. (Vergl. Thl. I. §. 63. g.)

b) Soll die ganze Oberfläche berechnet werden, so addire man zu dem nach a berechneten Mantel noch den Inhalt der Grundfläche.

c) Den Cubikinhalt erhält man, wie bei der Pyramide, indem man nämlich den Inhalt der Grundfläche mit der Höhe des Kegels multiplicirt und das Produkt durch 3 dividirt.

Vergl. §. 4. 2. und §. 37. c.

d) Für die Auffindung der Grundfläche aus der Höhe und dem Cubikinhalt, so wie der Höhe aus der Grundfläche und dem Cubikinhalte gelten dieselben Regeln, wie sie für diese Theile bei der Pyramide (§. 37. d u. e.) angegeben wurden.

e) Ist statt der Höhe, die Seite des Kegels bekannt, so kann jene aus dem rechtwinkligen Dreieck, welches die Kegelseite, der Halbmesser der Grundfläche und die Höhe des Kegels bilden, leicht berechnet werden (nach Thl. I. §. 49.)

f) Dasselbe Dreieck muß auch dann zu Hilfe genommen werden, wenn die Seite zu wissen nothwendig aber nur die Höhe und der Halbmesser der Basis bekannt sind.

Anmerkung. Oft genügt es auch die in e. und f. angeführten Theile mittelst Auftragen der erwähnten Dreiecke in verjüngtem oder natürlichem Maaßstabe nach Thl. I. §. 32. 5. und Anhang I. B. 14. zu bestimmen.

§. 44. Beispiele.

1) Der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels beträgt 3″ 4‴, die Seite ist 1′ 4″ lang; wie groß ist der Inhalt des Mantels und die ganze Oberfläche?

Auflös. Der Umfang der Grundfläche ist (Thl. I. §. 63. a.) $= 2 \times 0{,}34 \times 3{,}14 = 2{,}1352'$ also nach §. 43. a. der Inhalt des Mantels $= \frac{2{,}1352 \times 1{,}4}{2} = 1{,}49464 \square'$.

Der Inhalt der Grundfläche ist (Thl. I. §. 63. c. 2) $= 3{,}14 \times 0{,}34 \times 0{,}34 = 0{,}362984 \square'$; also die Oberfläche nach §. 43. b. $= 1{,}49464 + 0{,}362984 = 1{,}857624 \square'$ oder $1 \square' 85 \square'' 76\frac{6}{25} \square'''$.

A. n. z. M. Durchmesser $= 80'''$. Umfang $= 251{,}2'''$. Mantel $= 1 \square' 23 \square'' 67 \square'''$. Grundfläche $= 34 \square'' 128 \square'''$; folglich Oberfläche $= 1 \square' 58 \square'' 51 \square'''$.

2) Wie groß ist der Cubikinhalt eines 5 Fuß hohen Kegels, wenn der Durchmesser der Grundfläche 3 Fuß beträgt?

Auflös. Der Inhalt der Grundfläche ist, da der Halbmesser 1,5 Fuß beträgt. (Thl. I. §. 63. c. 2.) $= 1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14 = 7{,}065 \square'$; folglich nach §. 43. c. der Cubikinhalt des Kegels $= \frac{7{,}065 \times 5}{3} = 11{,}775\,c'$ oder $11\,c'\ 775\,c''$.

A. n. z. M. Cubikinhalt $= 11\,c'\ 1339\,c''$.

3) Der Cubikinhalt eines Kegels beträgt $397\,c'\ 363\,c''\ 200\,c'''$, die Höhe 12 Fuß; wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche?

Auflös. Der Inhalt der Grundfläche ist (§. 43. d.) $= \frac{397{,}3632 \times 3}{12} = 99{,}3408 \square'$; der Halbmesser also (Thl. I. §. 63. d.) $= \sqrt{\frac{99{,}3408}{3{,}14}} = \sqrt{31{,}6372} = 5{,}62'$ oder $5'\ 6''\ 2'''$.

A. n. z. M. $397\,c'\ 363\,c''\ 200\,c''' = 1186063112\,c'''$. Grundfläche $= \frac{1186063112 \times 3}{1728} = 2059137 \square'''$. Halbmesser $= \sqrt{\frac{2059137}{3{,}14}} = 809''' = 5'\ 7''\ 5'''$.

4) Der Durchmesser der Grundfläche eines Kegels beträgt 6′ 4″, sein Cubikinhalt 160 c′ 768 c″; wie hoch ist der Kegel?

Auflös. Der Halbmesser der Grundfläche ist $\frac{6,4}{2} = 3,2'$,

also der Inhalt dieser $= 3,2 \times 3,2 \times 3,14 = 32,1536 \square'$,

folglich nach §. 43. d. die Höhe $= \frac{160,768 \times 3}{32,1536} = 15'$.

A. n. z. M. Höhe $= \frac{277248 \times 3}{4534,16} = 183,4'' = 15' 3''$.

5) Wie groß ist die ganze Oberfläche und der Cubikinhalt eines Kegels, wenn der Umfang der Grundfläche 2,512 Fuß beträgt und die Seite desselben 2 Fuß lang ist?

Auflös. Nach Thl. I. §. 63. b. ist der Durchmesser der Grundfläche $= 2,512 : 3,14 = 0,8'$, also der Halbmesser $= 0,4'$ und der Inhalt $= 0,4 \times 0,4 \times 3,14 = 0,5024 \square'$.

Der Mantel beträgt nach §. 43. a. $= \frac{2,512 \times 2}{2} =$ $2,512 \square'$; folglich ist die Oberfläche $= 0,5024 \square' + 2,512 \square'$ $= 3,0144 \square' = 3 \square' 1 \square'' 44 \square'''$.

Um den Cubikinhalt zu bestimmen, muß zuerst, wie in §. 43 e. angegeben wurde, die Höhe berechnet werden. Es ist nach Thl. I. §. 49. das Quadrat über der Höhe $= 2 \times 2 - 0,4 \times 0,4 = 4 - 0,16 = 3,84$, also die Höhe $= \sqrt{3,84} = 1,959'$; folglich der Cubikinhalt des Kegels (§. 43. c.) $= \frac{0,5024 \times 1,959}{3} = 0,3280672$ c′ $= 328$ c″ $67\frac{1}{2}$ c‴.

Fig. 34.

Anmerkung.

Um die Höhe mittelst Construktion zu finden, mache man $ab = 4''$ (Fig. 34), errichte im Endpunkte c a senkrecht auf ab und schlage $bc = 2'$ von b aus auf ac ab, so gibt ac die verlangte Höhe, deren Länge nun leicht auf dem angenommenen Maaßstabe zu bestimmen ist.

6) Es soll ein Kegel aus Blech gefertigt werden, welcher 8 Zoll tief und an der Basis 6 Zoll weit werden soll; mit welchem

Halbmesser muß der Bogen des Sektors beschrieben werden, der das Netz bildet (§. 15.), und wie groß muß dieser Bogen gemacht werden, damit beim Zusammenpassen der verlangte Kegel erhalten wird?

Auflös. Der Radius des Netzsektors ist zugleich die Seite des Kegels. Diese wird nach §. 43. f. bestimmt, wie folgt: das Quadrat über der Seite (Thl. I. §. 48.) $= 0{,}8 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}64 + 0{,}09 = 0{,}73$, also die Seite selbst $= \sqrt{0{,}73} = 0{,}854'$ oder $8'' 5\frac{1}{2}'''$.

Der Bogen des Sektors bildet beim Zusammenlegen den Umfang der Basis und wird daher (nach Thl. I. §. 63. a.) $= 0{,}6 \times 3{,}14 = 1{,}884'$ oder $1' 8'' 8\frac{1}{2}'''$.

7) Ein kegelförmiger Behälter (Trichter) soll eine Stütze fassen und $1\frac{1}{2}$ Fuß tief werden; welche Dimensionen erhält das Netz hierzu?

Auflös. Da 18 Maas einen Cubikfuß ausmachen, so gibt 1 Stütze oder 10 Maas $\frac{10}{18} = \frac{5}{9}\ c' = 0{,}5555\ c'$. Der Inhalt der Grundfläche wird also nach §. 43. d. $= \frac{0{,}5555 \times 3}{1{,}5} = 1{,}1111\ \square'$ und der Halbmesser derselben (Thl. I. §. 63. d.) $= \sqrt{\frac{1{,}1111}{3{,}14}} = \sqrt{0{,}353857} = 0{,}594'$; demnach der Umfang, also auch der Bogen des Netzsektors (Thl. I. §. 63. a.) $= 2 \times 0{,}594 \times 3{,}14 = 3{,}73032'$ oder $3' 7'' 3'''$. Die Seite des Kegels oder der Halbmesser des Netzes ist wie in vorhergehender Aufgabe $= \sqrt{0{,}594 \times 0{,}594 + 1{,}5 \times 1{,}5} = \sqrt{2{,}602836} = 1{,}613'$ oder $1' 6'' 1\frac{3}{10}'''$

8) Ein eiserner Kegel von 100 ℔ Gewicht hat eine Basis von 4 Zoll Halbmesser; wie hoch ist er? (Spez. Gew. = 7,2.)

Auflös. Nach §. 24. ist der Cubikinhalt $= \frac{100}{54 \times 7{,}2} = 0{,}2572\ c'$. Der Inhalt der Grundfläche beträgt (Thl. I. §. 63. c. 2.) $0{,}4 \times 0{,}4 \times 3{,}14 = 0{,}5024\ \square'$; folglich wird nach §. 43. d. die Höhe des Kegels $= \frac{0{,}2572 \times 3}{0{,}5024} = 1{,}535'$ oder $1' 5'' 3\frac{1}{2}'''$.

§. 45. Berechnung des abgekürzten Kegels.

a) Um den Inhalt des Mantels zu finden, addire man die Umfänge der beiden Grundflächen, multiplicire die Summe mit der Seite des abgekürzten Kegels und dividire das Produkt durch 2.

b) Ist die ganze Oberfläche zu berechnen, so zähle man zu dem nach a. bestimmten Mantel, noch die Inhalte der beiden Grundflächen.

c) Den Cubikinhalt des abgekürzten Kegels findet man ähnlich, wie den der abgekürzten Pyramide (§. 39), nach einer mittelst Hilfe der Buchstabenrechnung abgeleiteten Formel.

Bezeichnet man nämlich den Radius der größeren Grundfläche mit R, den Radius der kleinern Grundfläche mit r und die Höhe des abgekürzten Kegels mit h, so heißt diese Formel:

$$\text{Cubikinhalt} = \frac{(R \times R + r \times r + R \times r) \times 3{,}14 \times h}{3}$$

Hiernach wird also der Cubikinhalt eines abgekürzten Kegels auf folgende Weise erhalten:

Man multiplicire den Halbmesser des größern Kreises mit sich, dann den Halbmesser des kleinern Kreises mit sich und noch den größern mit dem kleinern, zähle die drei Produkte zusammen, multiplicire die Summe mit 3,14 und nochmals mit der Höhe des Körpers und dividire zuletzt das erhaltene Resultat durch 3.

Anmerkungen.

1) Die soeben angeführte Methode wird immer angewendet, wenn eine ganz genaue Lösung der Aufgabe verlangt wird; oft und zwar in den meisten im Praktischen vorkommenden Fällen, genügt aber ein annäherndes Resultat. Ein solches kann auf folgende zwei Arten erzielt werden:

a) Man zähle die Halbmesser der beiden Grundflächen zusammen, dividire durch 2 (d. h. man nehme das Mittel beider Halbmesser) und rechne den Inhalt eines Kreises, welcher die gefundene Zahl zum Halbmesser hat und multiplicire diesen mit der Höhe des abgekürzten Kegels.

b) Man addire die Inhalte der beiden Grundflächen, multiplicire die Summe mit der Höhe des Körpers und dividire das Produkt durch 2.

Beide Verfahrungsarten liefern besonders dann hinreichend ge-

naue Werthe, wenn der zu berechnende Kegel sich der Form eines Cylinders nähert; also bei Berechnung von Baumstämmen, Säulen u. drgl. Die erste Methode gibt immer ein zu kleines, die zweite dagegen ein zu großes Resultat. Von beiden ist jedoch die erstere die genauere.

2) Zur Bestimmung der Höhe und der beiden Halbmesser der Begrenzungskreise dienen folgende Formeln (vergl. §. 39. Anmerkg. 2.)

$$1)\ h = \frac{3 \times C}{(R \times R + r \times r + R \times r) \times 3{,}14}$$

$$2)\ R = \sqrt{\frac{(3{,}14 \times r \times r \times h - 6 \times C) - r \times \sqrt{(4 \times C - 3{,}14 \times r \times r \times h) \times 9{,}42 \times h}}{6{,}28 \times h}}$$

$$3)\ r = \sqrt{\frac{(6 \times C - 3{,}14 \times R \times R \times h) - R \times \sqrt{(4 \times C - 3{,}14 \times R \times R \times h) \times 9{,}42 \times h}}{6{,}28 \times h}}$$

§. 46. Beispiele.

1) Die Durchmesser der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels sind 8 Fuß und 5 Fuß, die Seite desselben beträgt 12 Fuß; wie groß ist die krumme und wie groß die ganze Oberfläche.

Aufl. Der Umfang des größern Kreises ist (Thl. I. §. 63. a.) $= 8 \times 3{,}14 = 25{,}12'$; der des kleinern $= 5 \times 3{,}14 = 15{,}7'$ also nach §. 45. a.

Inhalt des Mantels $= \frac{(25{,}12 + 15{,}7) \times 12}{2} = 244{,}92\ \square'$

„ „ größern Kreises (Thl. I. §. 63. c. 1.)
$= \frac{25{,}12 \times 4}{2} = 50{,}24\ \square'$

Inhalt des kleinern Kreises $= \frac{15{,}7 \times 2{,}5}{2} = 19{,}625\ \square'$

folglich die ganze Oberfläche (§. 45. b.) $= 314{,}785\ \square'$

A. n. z. M. Das Resultat wird ebenfalls $= 314{,}785\ \square'$ oder $314\ \square' 113\ \square''$.

2) Man ſoll den Cubikinhalt eines abgekürzten Kegels von 5′ 7″ Höhe berechnen, wenn die Halbmeſſer der beiden Kreiſe 1′ 4″ und 8″ betragen.

Auflöſ. Nach der in §. 45. c. angegebenen Regel erhält man:

Der größere Halbmeſſer mit ſich = 1,4 × 1,4 = 1,96
„ kleinere „ „ „ = 0,8 × 0,8 = 0,64
„ größere „ mal dem kleinern = 1,4 × 0,8 = 1,12
zuſammen = 3,72

Dies mit der Höhe 5,7 multiplicirt macht 21,204, nochmals mit 3,14 gibt 66,58056 und dieſes durch 3 dividirt, folgt für den Cubikinhalt = 22,19352 c′ oder 22 c′ 193 c″ 520 c‴.

Löſt man dieſe Aufgabe nach den in §. 45. c. angeführten Näherungsmethoden, ſo erhält man:

1) Nach der erſten Methode a)

Mittel der beiden Halbmeſſer $= \frac{1,4 + 0,8}{2} = 1,1$

Inhalt des Kreiſes für dieſen Halbmeſſer = 1,1 × 1,1 × 3,14 = 3,7994 □′; alſo der Cubikinhalt = 3,7994 × 5,7 = 21 c′ 656 c″ 580 c‴.

2) Nach der zweiten Methode b)

Inhalt der größern Grundfläche = 1,4 × 1,4 × 3,14 = 6,1544 □′
„ „ kleinern „ = 0,8 × 0,8 × 3,14 = 2,0096 □′
Summe beider = 8,164

Dieſes mit der Höhe 5,7 multiplicirt gibt 46,5348 und dies durch 2 dividirt, folgt für den Cubikinhalt = 23 c′ 267 c″ 400 c‴.

Das erſtere Reſultat iſt alſo nur um 536 c″ 940 c‴ zu klein, das letztere um 1 c′ 73 c″ 880 c‴ zu groß.

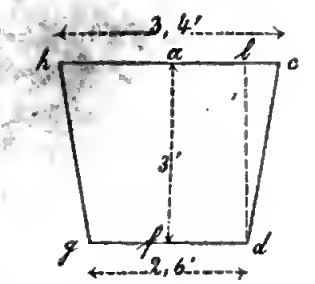
A. n. z. M. Cubikinhalt $= (16 \times 16 + 8 \times 8 + 16 \times 8) \times \frac{67 \times 3,14}{3}$
= 31416,74 c′ = 18 c′ 312 c″.

3) Ein kupferner Keſſel von der Form eines abgekürzten Kegels ſoll oben 3′ 4″ und unten 2′ 6″ weit und 3 Fuß tief werden, wie viel Quadratfuß Kupferblech werden erfordert (den Deckel nicht mitgerechnet), und wie viel Maas faßt der Keſſel?

Auflöſ. Stellt *hcdg* (Fig 35.) den Keſſel vor, ſo iſt alſo

$hc = 3{,}4'$, $gd = 2{,}6'$ und $af = 3'$. Um die krumme Oberfläche bestimmen zu können, muß zuvor die Seite des Kegels (cd) gesucht werden. Zieht man zu diesem Ende die senkrechte Linie db, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck dbc und ein Rechteck $abdf$, und

Fig. 35.



es ist $bd = af = 3'$, $ab = fd = \frac{2{,}6}{2} = 1{,}3'$; also da $ac = \frac{3{,}4}{2} = 1{,}7'$, wird $bc = ac - ab = 1{,}7 - 1{,}3 = 0{,}4'$; folglich nach Thl. I. §. 48. in dem Dreieck bcd das Quadrat über $cd = 0{,}4 \times 0{,}4 + 3 \times 3 = 0{,}16 + 9 = 9{,}16$, demnach $cd = \sqrt{9{,}16} = 3{,}026'$.

Der Umfang des größern Kreises $= 3{,}4 \times 3{,}14 = 10{,}676'$
„ „ „ kleinern „ $= 2{,}6 \times 3{,}14 = 8{,}164'$
Summe beider $= 18{,}84$

also nach §. 45. a. der Inhalt des Mantels $= \frac{18{,}84 \times 3{,}026}{2} = 28{,}50492\ \square'$

Der Inhalt d. Bodens $= 1{,}3 \times 1{,}3 \times 3{,}14 = 5{,}3066\ \square'$

hierzu addirt gibt das erforderl. Kupferblech $= 33{,}81152\ \square'$
oder $33\ \square'\ 81\ \square''\ 15\ \square'''$.

Zur Beantwortung der zweiten Frage hat man zunächst den Cubikinhalt des Kessels zu berechnen. Dieser wird nach §. 45. c., wenn man in der dort aufgestellten Formel für die Buchstaben, die betreffenden Zahlenwerthe setzt $=$

$$\frac{(1{,}7 \times 1{,}7 + 1{,}3 \times 1{,}3 + 1{,}7 \times 1{,}3) \times 3{,}14 \times 3}{3}$$

$= 21{,}3206\ c'$.

Da nun $1\ c' = 18$ Maas ausmacht (§. 18. Anmrk. 1), so faßt also der Kessel $21{,}3206 \times 18 = 383{,}7708$ oder nahezu 384 Maas.

4) Mittelst eines Meßbandes wurden die Umfänge eines 20′ 4″ langen Baumstammes an beiden Enden gleich 7′ 8½″ und 6′ 2″ 8‴ gefunden; wie groß ist der Cubikinhalt und was kostet dieser Stamm, wenn der Cubikfuß zu 30 kr. gerechnet wird?

Auflösung. Um die Berechnung nach der in §. 45. c. angegebenen Formel vornehmen zu können, müssen zuerst die Halbmesser an den beiden Enden bestimmt werden.

Der Durchmesser des größern Kreises wird (Thl. I. §. 63. b.) = 7,85 : 3,14 = 2,5′, also der Halbmesser R = 1,25; eben so findet man den Halbmesser r = 1′. Setzt man diese Zahlenwerthe in die erwähnte Formel, so erhält man:

Cubikinhalt =

$$\frac{(1{,}25 \times 1{,}25 + 1 \times 1 \times 1{,}25 \times 1) \times 3{,}14 \times 20{,}4}{3}$$

= 81,4045 c′.

Der Stamm kostet daher 81,4045 × ½ fl. = 40 fl. 42 kr.

§. 47. Berechnung der Kugel.

a) Die Oberfläche einer Kugel wird erhalten, wenn man den Inhalt eines größten Kreises 4 mal nimmt, oder auch wenn man den Durchmesser mit sich und mit 3,14 multiplicirt.

b) Um den Cubikinhalt einer Kugel zu bestimmen, multiplicire man den Durchmesser dreimal mit sich und mit 3,14 und dividire das Produkt durch 6.

Anmerkungen.

1) Ist die Oberfläche schon bekannt, so erhält man den Cubikinhalt auch, wenn man diese mit dem Halbmesser der Kugel multipticirt und das Produkt durch 3 dividirt.

2) Ein annäherndes Resultat wird gefunden, wenn man den Durchmesser dreimal mit sich multipticirt und das Produkt halbirt.

Die Kugel ist also nahezu die Hälfte eines Würfels, dessen Seite gleich dem Durchmesser dieser Kugel ist.

c) Um den Durchmesser einer Kugel bei bekannter Oberfläche zu finden, dividire man (nach a.) letztere

durch 3,14 und ziehe aus dem Resultate die Quadratwurzel.

Wird der Durchmesser halbirt, so erhält man den Halbmesser.

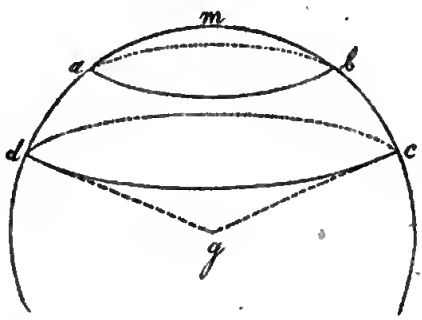
d) Ist der Cubikinhalt bekannt, so findet man den Durchmesser, wenn man mit 3,14 in den sechsfachen Cubik-Inhalt dividirt und aus dem Resultate die Cubikwurzel zieht.

e) Der Flächeninhalt einer Kugelhaube (§. 4. 3.), so wie eines Kugelgürtels ist gleich dem Umfange eines größten Kreises der Kugel multiplicirt mit der Höhe dieser Flächen.

f) Um den Cubikinhalt eines Kugelsektors zu berechnen, multiplicire man den nach e. berechneten Inhalt der zu diesem Sektor gehörigen Haube mit dem Halbmesser der Kugel und dividire das Produkt durch 3.

g) Der Kubikinhalt eines Kugelsegments *dcm* (Fig. 36) ist gleich dem Inhalte des ganzen Sektors *gdmc* weniger dem Cubikinhalte des Kegels *dcg*.

Fig. 36.



h) Man findet den Cubikinhalt einer körperlichen Zone *abcd* (Fig. 36.), wenn man den Cubikinhalt des Segments *abm* von dem Cubikinhalte des Segments *dcm* abzieht.

Anmerkung. Annähernd findet man den Cubikinhalt der Zone, wenn man diese als einen abgekürzten Kegel nach §. 45. c. berechnet.

i) Soll der Cubikinhalt einer Hohlkugel berechnet werden, so ziehe man den Cubikinhalt des hohlen Raumes von dem Cubikinhalte der ganzen Kugel ab.

§. 48. Beispiele.

1) Wie groß ist die Oberfläche und der Cubikinhalt einer Kugel von 2′ 4″ Halbmesser?

Auflös. Der Inhalt eines größten Kreises dieser Kugel ist (Thl. I. §. 63. c. 2.) $= 2{,}4 \times 2{,}4 \times 3{,}14 = 18{,}0864\,\square'$, also nach §. 47. a. die Oberfläche $= 4 \times 18{,}0864\,\square' = 72{,}3456\,\square'$ oder $72\,\square'\ 34\,\square''\ 56\,\square'''$. Nach der Anmerkung 1. zu §. 47. b. wird demnach der Cubikinhalt $= \frac{72{,}3456 \times 2{,}4}{3} = 57{,}87648\,c'$ oder $57\,c'\ 876\,c''\ 480\,c'''$.

A. n. z. M. Oberfläche $= 28 \times 28 \times 3{,}14 \times 4 = 9847\,\square'' = 68\,\square'\ 55\,\square''$. Cubikinhalt $= 53\,c'\ 322\,c''$.

2) Die Oberfläche einer Kugel beträgt $6\,\square'\ 28\,\square''$; wie groß ist der Durchmesser und der Cubikinhalt derselben?

Auflös. Nach §. 47. c. wird der Durchmesser $= \sqrt{\frac{6{,}28}{3{,}14}} = \sqrt{2} = 1{,}414'$ folglich der Halbmesser $= 0{,}707'$, also nach §. 47. b. Anmerkung 1. der Cubikinhalt $= \frac{6{,}28 \times 0{,}707}{3} = 1{,}47998\,c'$ oder $1\,c'\ 479\,c''\ 980\,c'''$.

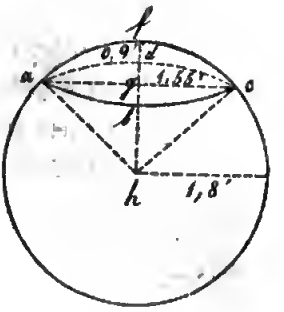
A. n. z. M. $6\,\square'\ 28\,\square'' = 892\,\square''$. Durchmesser $= \sqrt{\frac{892}{3{,}14}} = \sqrt{284} = 16\frac{4}{5}'' = 1'\ 4\frac{4}{5}''$. Cubikinhalt $= 1\,c'\ 769\,c''$.

3) Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel von $1\,c'\ 436\,c''\ 27\,c'''$ Inhalt?

Auflös. Nach §. 47. d. ist der Durchmesser $= \sqrt[3]{\frac{6 \times 1{,}436027}{3{,}14}} = \sqrt[3]{2{,}744} = 1{,}4'$ oder $1'\ 4''$.

A. n. z. M. Durchmesser $= \sqrt[3]{\frac{6 \times 3739419\,c'}{3{,}14}} = \sqrt[3]{7145386} = 192''' = 1'\ 4''$.

Fig. 37.



4) Von einer Kugel von 1′ 8″ Halbmesser wird durch eine Ebene ein Segment *a b c f d* (Fig. 37) abgeschnitten; wie groß ist die Oberfläche der Haube und der Cubikinhalt dieses Segments, wenn *f g* = 9 Zoll und *g c* = 1′ 5½″ bestimmt wurden?

Auflösung. Der Inhalt eines größten Kreises ist 3,14 × 1,8 × 1,8 = 10,1736 □′, folglich nach §. 47. e. die Oberfläche der Haube = 10,1736 × 0,9 = 9,15624 □′ oder 9 □′ 15 □″ 62⅞ □‴.

Der Cubikinhalt des Segments ist nach §. 47. g. zu berechnen.

Nach §. 47. f. wird der Cubikinhalt des Sektors *a f c h* $= \frac{9{,}15624 \times 1{,}8}{3} = 5{,}493744$ c′. Der Inhalt des Kreises *a b c d* ist = 3,14 × 1,55 × 1,55 = 7,54385 □′; also nach §. 43. *c.* der Cubikinhalt des Kegels *a c h*, da *g h* = *h f* − *f g* = 1,8 − 0,9 = 0,9 ist, $= \frac{7{,}54385 \times 0{,}9}{3} = 2{,}263155$ c′; folglich der Cubikinhalt des Segments *a b c f d* = 5,493744 − 2,263155 = 3,230589 c′ oder 3 c′ 230 c″ 589 c‴.

5) Welchen Cubikinhalt hat die Eisenmasse einer Hohlkugel, wenn der größere Durchmesser 1′ 2″ und die Eisendicke 2″ betragen, und wie schwer ist dieselbe?

Auflös. Der Cubikinhalt der ganzen Kugel ist (§. 47. b.) $= \frac{1{,}2 \times 1{,}2 \times 1{,}2 \times 3{,}14}{6} = 0{,}90432$ c′, der Durchmesser des hohlen Raumes ist, da an dem größern Durchmesser auf beiden Seiten 2 Zoll abgehen = 1,2′ − 0,4′ = 0,8′; also der Cubikinhalt desselben =

$$\frac{0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 3{,}14}{6}$$

$= 0{,}267946\,c'$ folglich der Cubikinhalt der Eisenmasse (§. 47. i.) $= 0{,}90432\,c' - 0{,}267946\,c' = 0{,}636374\,c'$ oder $636\,c''\ 374\,c'''$.

Da das spec. Gewicht des Gußeisens (Anh. IV.) $= 7{,}2$ ist, so wiegt diese Masse (§. 23.) $= 0{,}636374 \times 54 \times 7{,}2 = 247{,}422\,\text{℔}$ oder 2 Ctr. $47\frac{1}{2}\,\text{℔}$.

6) Wie groß ist das Gewicht einer eisernen Kugel, deren größter Kreis einen Umfang von $7'\ 8''\ 5'''$ hat?

Auflösung. Man hat hier zuerst den Durchmesser, dann den Cubikinhalt und hieraus das Gewicht zu bestimmen.

Der Durchmesser ist (Thl. I. §. 63. b.) $= \frac{7{,}85}{3{,}14} = 2{,}5'$,

also der Cubikinhalt (§. 47. b.) $= \frac{2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 \times 3{,}14}{6}$

$= 8{,}177\,c'$; folglich das Gewicht (§. 23.) $=$ $8{,}177 \times 54 \times 7{,}2 = 3179{,}2176\,\text{℔}$ oder 31 Ctr. $79\frac{1}{2}\,\text{℔}$.

7) Wie groß ist der Durchmesser einer 48pfündigen Kugel von Eisen? (Sp. G. $= 7{,}2$.)

Auflösung. Nach §. 24. ist der Inhalt $= \frac{48}{54 \times 7{,}2} =$ $0{,}123456\,c'$; also nach §. 47. d. der Durchmesser $= \sqrt[3]{\frac{6 \times 0{,}123456}{3{,}14}} = \sqrt[3]{0{,}23558} = 0{,}61'$ oder $6''\ 1'''$.

A. n. z. M. Cubikinhalt $= \frac{48}{66 \times 7{,}2} = 0{,}10101\,c'$. Durchmesser $= 6''\ 11'''$.

8) Aus einer Kugel von Blei, welche $316\,\text{℔}$ 16 Loth wiegt, sollen kleinere für einen Büchsenlauf von 5 Linien Weite gegossen werden; wie viele solcher Kugeln werden erhalten, wenn das spec. Gewicht des Bleis zu 11,44 angenommen wird?

Auflös. Man dividire mit dem Cubikinhalt der kleinern Kugel in den der größern. Wie in Aufgabe 7. folgt:

Cubikinhalt der großen Kugel $= \frac{316{,}5}{54 \times 11{,}44} = \frac{316{,}5}{617{,}76}$

$= 0{,}512334\,c'$. Der Durchmesser einer kleinen Kugel muß $5'''$ oder $0{,}05'$ sein, also wird der Cubikinhalt einer solchen $=$

$$\frac{0{,}05 \times 0{,}05 \times 0{,}05 \times 3{,}14}{6}$$

$= 0{,}00006541\,c'$. Aus der großen Kugel lassen sich also gießen:

$0{,}512334 : 0{,}00006541 = 51233400 : 6541 = 7832$ Stück kleinere.

9) Eine Kugel hat einen Durchmesser von $5'$; wie groß ist der Inhalt einer Kugel von doppeltem, drei- und vierfachem Durchmesser?

Auflösung. Inhalt der Kugel von $5'$ Durchmesser $=$

$$\frac{5 \times 5 \times 5 \times 3{,}14}{6} = 65{,}4166\,c'.$$

Inhalt der Kugel von $2 \times 5 = 10'$ Durchmesser $=$

$$\frac{10 \times 10 \times 10 \times 3{,}14}{6} = 523{,}3333\,c'.$$

Inhalt der Kugel von $3 \times 5 = 15'$ Durchmesser $=$

$$\frac{15 \times 15 \times 15 \times 3{,}14}{6} = 1766{,}25\,c'.$$

Inhalt der Kugel von $4 \times 5 = 20'$ Durchmesser $=$

$$\frac{20 \times 20 \times 20 \times 3{,}14}{6} = 4186{,}66\,c'.$$

Anmerkung. Aus der nähern Betrachtung dieser Resultate ergibt sich für die Kugel ein ähnlicher Satz wie er in der Anmerkung zur Aufgabe 10. in §. 36. für den Würfel aufgestellt wurde.

Man bemerkt nämlich, daß $523{,}333\ldots = 8 \times 65{,}4166$; $1766{,}25 = 27 \times 65{,}4166$; und $4186{,}66\ldots = 64 \times 65{,}4166\ldots$ ist, daß also der Cubikinhalt einer Kugel, somit auch das Gewicht (wenn die Materie dieselbe ist) von doppeltem Durchmesser 8mal, von dreifachem 27mal und von vierfachem Durchmesser 64mal größer wird, oder daß sich die Kugeln verhalten wie die Cubikzahlen ihrer Durchmesser oder Halbmesser.

Auf gleiche Weise läßt sich für alle unter einander ähnliche (gleichgeformte) Körper folgender Satz nachweisen:

Aehnliche Körper verhalten sich dem Cubikinhalte nach, wie die Cubikzahlen irgend gleichliegender Kanten oder Linien derselben. Alle Würfel, so wie alle Kugeln sind unter einander ähnlich.

Anhang.

I. Aufgaben über die Berechnung der Körper.

1) Die Seite eines Würfels beträgt 8′ 4″; wie groß iſt die Oberfläche?

Auflöſung. Der Inhalt eines Seitenquadrats iſt = 8,4 × 8,4 = 70,56 □′, alſo die Oberfläche (§. 28. a.) = 70,56 × 6 = 423 □′ 36 □″.

2) Wie groß iſt der Cubikinhalt eines Würfels von 4″ 2‴ Seite?

Auflöſung. Cubikinhalt (§. 28. c.) = 0,42 × 0,42 × 0,42 = 0,074088 c′ = 74 c″ 88 c‴.

3) Ein Würfel von 2′ 4″ Seite kann in wie viele Würfel von 3″ Seite zerlegt werden?

Auflöſung. Cubikinhalt des ganzen Würfels (§. 28. c.) = 2,4 × 2,4 × 2,4 = 13,824 c′. Der Cubikinhalt eines kleinern Würfels = 0,3 × 0,3 × 0,3 = 0,027 c′; folglich werden aus erſterem erhalten: 13,824 : 0,027 = 13824 : 27 = 512 Würfel von 3″ Seite.

4) Wie groß iſt der Cubikinhalt eines Würfels deſſen Oberfläche 174 □′ 96 □″ beträgt?

Auflöſ. Der Inhalt einer Seitenfläche iſt = 174,96 : 6 = 29,16 □′, folglich eine Seite (Thl. I. §. 36. b.) = √29,16 = 5,4′ und der Cubikinhalt = 5,4 × 5,4 × 5,4 = 157 c′ 464 c″.

5) Wie viel Maas Waſſer faßt ein Gefäß, deſſen hohler Raum die Form eines Würfels von 8″ Seite hat?

Auflöſung. Der Cubikinhalt iſt (§. 28. c.) = 0,8 × 0,8 × 0,8 = 0,512 c′, alſo hält das Gefäß (§. 18. Anmerkung.) 0,512 × 18 = 9,216 Maas.

6) Wie viel wiegt ein Postament von Granit, wenn dasselbe einen Würfel von 2′ Seite bildet?

Auflösung. Cubikinhalt $= 2 \times 2 \times 2 = 8\,c'$, also das Gewicht, da das spec. Gewicht des Granits nach Anhang IV. $= 2{,}7$ ist $= 8 \times 51 \times 2{,}7 = 1166\frac{2}{5}$ ℔. (§. 23.)

7) Ein Würfel von Gußeisen wiegt 2 Ctr.; wie groß ist eine Seite desselben?

Auflös. Das spec. Gewicht ist nach Anhang IV. $= 7{,}2$ und $54 \times 7{,}2 = 388{,}8$, also nach §. 24. der Cubikinhalt $= 200 : 388{,}8 = 0{,}514403$, folglich nach §. 28. e eine Seite des Würfels $= \sqrt[3]{0{,}514403} = 0{,}801'$ oder $8'' \frac{1}{10}'''$.

8) Wenn die Seite eines Würfels 6′ beträgt, um wie viel ist die Seite eines Würfels von doppeltem Inhalte größer?

Auflös. Inhalt des Würfels $= 6 \times 6 \times 6 = 216\,c'$, also der des doppelt so großen $= 432\,c'$ und eine Seite desselben $= \sqrt[3]{432} = 7{,}55'$, demnach um $7{,}55 - 6 = 1{,}55'$ oder $1' 5\frac{1}{2}''$ größer. (Vergl. die Anmerk. zu Aufg. 10. in §. 36.)

9) Ein Gefäß soll die Form eines Würfels bekommen und 4 Maas halten; wie groß muß eine Seite desselben gemacht werden und wie viel Blech ist erforderlich, wenn das Gefäß offen bleibt?

Auflös. 4 Maas geben $\frac{4}{18}$ oder $\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots c'$, also wird eine Seite (§. 28. e.) $= \sqrt[3]{0{,}222222} = 0{,}605' = 6'' \frac{1}{2}'''$.

Der Inhalt eines Seitenquadrats ist $= 0{,}605 \times 0{,}605 = 0{,}366025\,\square'$ also braucht man $0{,}366025 \times 5 = 1{,}830125\,\square'$ oder $1\,\square' 83\,\square''$ Blech.

10) Welche Oberfläche hat ein regelmäßiges vierseitiges Prisma von 8′ Höhe, wenn eine Seite der Grundfläche 1′ 5″ lang ist?

Auflösung.

Der Inhalt beider Grundflächen ist $= 1{,}5 \times 1{,}5 \times 2 = 4{,}5\,\square'$
der Inhalt der 4 Seitenflächen $= 1{,}5 \times 8 \times 4 = 48\,\square'$

folglich die Oberfläche (§. 26. a.) $= 52{,}5\,\square'$

11) Ein Holzkistchen mit Deckel, das 2′ 4″ lang 1′ 5″ breit und 2′ tief ist, soll mit Papier überklebt werden; wie viele Bogen sind erforderlich, wenn jeder 1′ 5″ lang und 1′ 2″ breit ist?

Auflösung.

Inhalt des Bodens und Deckels $= 2{,}4 \times 1{,}5 \times 2 = 7{,}2\ \square'$
Inhalt der 4 Seitenwände $= 2{,}4 \times 2 \times 2 + 1{,}5 \times 2 \times 2 = 15{,}6\ \square'$
die zu überklebende Fläche also $= 22{,}8\ \square'$

Der Inhalt eines Bogen Papiers $= 1{,}5 \times 1{,}2 = 1{,}8\ \square'$; folglich sind nöthig $22{,}8 : 1{,}8 = 12{,}66\ldots$ oder $12\frac{2}{3}$ Bogen.

12) Wie groß ist der Cubikinhalt einer 8′ hohen Mauer, wenn dieselbe 123′ lang und 2′ dick ist?

Auflös. Nach §. 26. Anmerkung zu b. wird der Cubikinhalt $= 123 \times 8 \times 2 = 1968\,c'$.

13) Es soll ein Graben von 430′ Länge, 4′ Tiefe und 3′ Breite hergestellt werden; wie viel Cubikfuß Erde sind wegzuschaffen?

Auflös. Cubikinhalt (§. 26. b.) $= 430 \times 3 \times 4 = 5160\,c'$.

14) Wie theuer kommt ein prismatischer Baumstamm, welcher 20′ lang, $2\frac{1}{2}$′ hoch und 2′ 2″ dick ist, wenn für den Cubikfuß 48 kr. bezahlt werden müssen?

Auflös. Cubikinhalt des Stammes (§. 26. b.) $= 2{,}5 \times 2{,}2 \times 20 = 110\,c'$, diese kosten 110×48 kr. $= 88$ fl.

15) In einen Behälter, welcher 18′ lang, 4′ tief und 4′ 5″ breit ist, fließen durch eine Röhre in jeder Minute 27 Maas Wasser; in welcher Zeit wird derselbe gefüllt sein?

Auflös. Der Cubikinhalt des Behälters ist $= 18 \times 4{,}5 \times 4 = 324\,c'$. Der Cubikinhalt von 27 Maas ist (§. 18. Anmerkung) $= \frac{27}{18}$ oder $1\frac{1}{2} = 1{,}5\,c'$, also wird der Behälter gefüllt in $324 : 1{,}5 = 216$ Minuten oder in 3 Stunden 36 Minuten.

16) Welches Gewicht hat ein Sandstein, der 5′ 8″ lang, 3′ 4″ breit und 2′ 5″ hoch ist, wenn sein spec. Gewicht 2,4 beträgt?

Auflös. Cubikinhalt des Steins (§. 26. b.) $= 5{,}8 \times 3{,}4 \times 2{,}5 = 49{,}3\,c'$, daher sein Gewicht (§. 23.) $= 49{,}3 \times 54 \times 2{,}4 = 6389{,}28\ \text{℔} = 63$ Ctr. $89\frac{2}{5}$ ℔.

17) Auf einem 45′ langen, 28′ breiten Fruchtboden ist 2′ hoch Frucht aufgeschüttet; wie viel Malter liegen daselbst?

Auflösung. Der Cubikinhalt der Frucht beträgt (§. 26. b.) $45 \times 28 \times 2 = 2520\,c'$; diese geben (§. 18. Anmerk.) $2520 \times 18 = 45360$ Meßlein $= 4536$ Sester oder $453\frac{3}{5}$ Malter.

18) Wie viel wiegt eine Bleiplatte, welche 3′ 4″ lang, 1′ 5″ breit und 4‴ dick ist? (Spec. Gew. = 11,38.)

Auflös. Cubikinhalt der Platte = 3,4 × 1,5 × 0,04 = 0,204 c′; also das Gewicht = 0,204 × 11,38 × 54 = 125,36208 ℔ oder 125 ℔ 12 Loth.

19) 2304 c′ Steine sind so aufgesetzt, daß sie eine 4′ dicke und 8′ hohe Mauer bilden; wie lang ist diese?

Auflösung. Nach der Anmerkung zu d. in §. 26. wird sie $\frac{2304}{4 \times 8}$ = 72′ lang.

20) Man soll aus 1984 c′ Steinen eine 124′ lange und 8′ hohe Mauer aufführen; wie dick wird dieselbe gemacht werden müssen?

Auflös. Die Dicke wird $\frac{1984}{124 \times 8}$ = 2′ (§. 26. d. Anmerkg).

21) Es soll ein Keller von 14′ Tiefe, 28′ Länge und 16′ Breite gegraben werden. Wie viele Wagen Erde sind wegzuschaffen, wenn der Wagenkasten 7′ lang, 2′ breit und 1½′ tief ist?

Auflös. Cubikinhalt der auszugrabenden Erde = 28 × 16 × 14 = 6272 c′:

Inhalt des Wagenkastens = 7 × 2 × 1,5 = 21 c′.
Es gibt daher 6272 : 21 = 299 Fuhren. (Vergl. Anmerkg. zu Aufg. 9. §. 27.)

22) Es soll eine 85′ lange, 8′ hohe und 1′ 8″ dicke Mauer aus Backsteinen aufgeführt werden. Wie viel Backsteine sind zur Aufführung erforderlich und was kosten dieselben, wenn jeder 9″ lang, 4½″ breit und 2″ dick ist und 100 Backsteine mit 1 fl. 30 kr. bezahlt werden?

Auflös. Cubikinhalt der Mauer (§. 26. b.) = 85 × 1,8 × 8 = 1224 c′. Inhalt eines Backsteins = 0,9 × 0,45 × 0,2 = 0,081 c′ folglich sind erforderlich 1224 : 0,081 = 15112 Backsteine und diese kosten $\frac{15112 \times 1\frac{1}{2} \text{ fl.}}{100}$ = 226 fl. 40 kr.

23) Es hat Jemand 16 Eisenstäbe, von welchen jeder 3′ lang, 8‴ breit und 6‴ dick ist. Es wird daraus ein Würfel gegossen; wie groß ist eine Seite desselben?

Auflös. Cubikinhalt eines Stabes = 3 × 0,08 × 0,06 = 0,0144 c′; also der Inhalt der 16 Stäbe = 0,0144 × 16 = 0,2304 c′ =

dem Cubikinhalt des Würfels. Eine Seite desselben wird demnach (§. 28. d.) $= \sqrt[3]{0{,}2304} = 0{,}613' = 6'' \; 1\frac{3}{16}'''$.

24) Ein Baumstamm ist 46′ lang, 3′ 5″ breit und 2′ 8″ hoch; wie viel Klafter Holz liefert derselbe?

Auflös. Cubikinhalt des Stammes $= 46 \times 3{,}5 \times 2{,}8 = 450{,}8\,c'$; folglich, da 1 Klafter nach §. 18. 144 c′ hat, liefert der Stamm $450{,}8 : 144 = 3\frac{1}{8}$ Klafter.

Anmerkung. Beim wirklichen Messen wird sich aber ein größeres Resultat herausstellen. Warum?

25) Ein Kühlschiff soll $4\frac{1}{2}$ Ohm fassen und 8′ breit werden; wie lang muß man dasselbe machen, wenn das Bier nur $2\frac{1}{4}''$ hoch stehen darf?

Auflösung. $4\frac{1}{2}$ Ohm sind 25 c′ (§. 18.), folglich wird die Länge (§. 26. d.) $= \frac{25}{8 \times 0{,}25} = 12\frac{1}{2}'$.

26) Es soll ein Kanal von 15600′ Länge, 60′ Breite und 12′ Tiefe in 6 Monaten (= 156 Arbeitstagen) gegraben werden; wie viel Arbeiter muß man anstellen, wenn angenommen wird, daß ein Mann im Durchschnitt täglich 96 c′ Erde wegschafft?

Auflös. Inhalt des Canals $= 15600 \times 60 \times 12 = 11232000\,c'$. In 156 Tagen fördert 1 Mann $156 \times 96 = 14976\,c'$; folglich sind anzustellen $11232000 : 14976 = 750$ Arbeiter.

27) Eine regelmäßige achtseitige Säule von 24′ Höhe hat an der Grundfläche eine Seite von 1′ 5″ Länge; wie theuer kommt der Anstrich der Seitenflächen, wenn der Quadratfuß $2\frac{1}{4}$ kr. kostet und wie groß ist der Cubikinhalt dieser Säule?

Auflös. Inhalt eines Seitenrechtecks $= 24 \times 1{,}5 = 36\,\square'$; also der Mantel $= 36 \times 8 = 288\,\square'$. Der Anstrich kostet daher $288 \times 2\frac{1}{4} = 720$ kr. $= 12$ fl.

Der Inhalt der Grundfläche ist nach Thl. I. §. 61. d. $= 4{,}828 \times 1{,}5 \times 1{,}5 = 10{,}863\,\square'$; folglich der Cubikinhalt der Säule $= 10{,}863 \times 24 = 260\,c'\;712\,c''$.

28) Die Luft übt einen Druck aus, der gleich ist dem Gewichte einer Queckſilberſäule, welche die gedrückte Fläche zur Grundfläche und den jeweiligen Barometerstand zur Höhe hat. Wie stark drückt hiernach die Luft auf die Oberfläche eines Menschen, wenn diese zu 14 □′ angenommen wird, bei

einem Barometerstand von 27½"? (Spec. Gew. des Queckſilbers = 13,6.)

Auflöſ. Der Cubikinhalt der erwähnten Queckſilberſäule iſt = $14 \times 2{,}75 = 38{,}5$ c′; alſo ihr Gewicht oder auch der Luftdruck = $38{,}5 \times 54 \times 13{,}6 = 28274{,}4$ ℔ oder 282¾ Ctr. (nahezu).

29) Wie groß iſt die ganze Oberfläche einer Pyramide mit quadratiſcher Baſis, wenn die Seite der Grundfläche = 8′ 5" und die Höhe eines Seitendreiecks = 12′ 4" iſt?

Auflöſung. Inhalt der Grundfläche $= 8{,}5 \times 8{,}5 = 72{,}25$ □′
Inhalt der 4 Seitenflächen (Thl. I. §. 46. a.) =
$$\frac{8{,}5 \times 12{,}4}{2} \times 4 = 210{,}8 \text{ □′}$$
folglich die Oberfläche $= 283{,}05$ □′

30) Eine regelmäßige vierſeitige Pyramide hat an der Grundfläche 2′ 3" Seite und eine Höhe von 8′ 7"; wie groß iſt der Cubikinhalt?

Auflöſ. Inhalt der Grundfläche $= 2{,}3 \times 2{,}3 = 5{,}29$ □′; alſo der
Cubikinhalt (§. 37. c.) $= \frac{5{,}29 \times 8{,}7}{3} = 15$ c′ 341 c″.

31) Zu den größten Gebäuden auf der Erde gehören die Pyramiden von Ghize in Egypten. Unter ihnen befindet ſich eine (die Pyramide des Cheops), welche an der Grundfläche an jeder Seite 775′ (= 716 par. Fuß) lang iſt und deren ſenkrechte Höhe 507′ (= 468 par. Fuß) beträgt; wie groß iſt das Gewicht derſelben, wenn das ſpec. Gewicht der Maſſe, aus welcher ſie beſteht = 2,7 iſt?

Aufl. Inhalt der Grundfläche $= 775 \times 775 = 600625$ □′. Cubikinh. der Pyramide $= \frac{600625 \times 507}{3} = 101505625$ c′; folglich ihr Gewicht $= 101505625 \times 54 \times 2{,}7 = 14799520125$ ℔ oder 147995201¼ Ctr.

32) Wie hoch muß eine vierſeitige Pyramide mit quadratiſcher Baſis von 1′ 5" Seite gemacht werden, damit ſie 2 Ctr. wiegt, wenn das ſpec. Gewicht = 2,5 iſt?

Auflöſung. Cubikinhalt nach §. 24 $= \frac{200}{54 \times 2{,}5} = 1{,}481481$ c′.
Inhalt der Grundfläche $= 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$ □′; folglich die Höhe nach §. 37. c. $= \frac{1{,}481481 \times 3}{2{,}25} = 1{,}975$′.

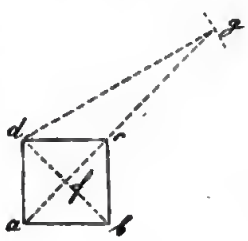
33) Wie groß ist die Seite der Grundfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide von 12′ Höhe und 768 c′ Inhalt?

Auflösung. Nach §. 37. d. wird der Inhalt der Grundfläche $= \frac{768 \times 3}{12} = 192 \square'$; folglich eine Seite derselben $= \sqrt{192} = 13{,}85' = 13' 8\frac{1}{2}''$.

34) Ein Grabstein von Granit bildet eine regelmäßige vierseitige Pyramide. Wie groß ist der Cubikinhalt und das Gewicht desselben, wenn die Seite der Grundfläche $= 3'$ und eine Seitenkante $= 8'$ ist? (Spec. Gew. des Granits $= 2{,}7$.)

Auflös. Nach Thl. 1. §. 61. b. ist der Halbmesser R des um die Grundfläche beschriebenen Kreises $= 0{,}707 \times 3 = 2{,}121'$. Dieser Halbmesser bildet aber mit der Höhe und der Seitenkante der Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck und es ist also nach Thl. 1. §. 49. das Quadrat über der Höhe $= 8 \times 8 - 2{,}121 \times 2{,}121 = 59{,}501359$, demnach die Höhe selbst $= \sqrt{59{,}501359} = 7{,}713'$. Der Cubikinhalt wird folglich, da die Grundfläche $= 9 \square'$ ist, nach §. 37. c. $= \frac{9 \times 7{,}713}{3} = 23{,}139$ c′ und das Gewicht (§. 23.) $= 23{,}139 \times 2{,}7 \times 54 = 3373$ ℔ 21 Loth.

Fig. 38.



Anmerkung. Die Höhe der Pyramide könnte man auch auf folgende Weise durch Zeichnung bestimmen: Zeichne ein Quadrat *abcd* (Fig. 38.) mit 3′ Seite in verjüngtem Maaße, ziehe *ac* und *db*, verlängere *ac* und schlage von *d* aus die Kante $= 8'$ nach *dg*, so gibt *fg* die verlangte Höhe, deren Länge nun rückwärts auf dem Maaßstabe zu bestimmen ist.

35) Die Höhe einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist 16′ und die Seite der Basis 5′ lang; wie groß ist die ganze Oberfläche?

Auflös. Um die Oberfläche berechnen zu können, ist nach §. 37. a. die Länge der Höhe eines Seitendreiecks zu wissen nöthig. Diese bildet aber mit der Höhe der Pyramide und dem Halbmesser des in die Grundfläche beschriebenen Kreises ein rechtwinkliges Dreieck und kann sonach leicht gefunden werden. Der erwähnte Halbmesser r wird nach Thl. 1. §. 61. b. $= 0{,}866 \times 5 = 4{,}33'$, also das Quadrat über der Höhe des Seitendreiecks (nach Thl. 1. §. 48.) $= 16 \times 16 + 4{,}33 \times 4{,}33 = 274{,}7489$ und die Höhe selbst $=$

$\sqrt{274{,}7489} = 16{,}57'$. Der Inhalt eines Seitendreiecks wird demnach (Thl. I. §. 46. a.) $= \frac{16{,}57 \times 5}{2} = 41{,}425\,\square'$; also der des

Mantels $= 41{,}425 \times 6 =$ . . . . . $248{,}55\,\square'$

Hierzu die Grundfläche (Thl. I. §. 51. d.) $=$

$2{,}598 \times 5 \times 5 =$ . . . . . $64{,}95\,\square'$

addirt, gibt für die ganze Oberfläche $= 313{,}5\,\square' = 313\frac{1}{2}\,\square'$.

Anmerkung. Die Höhe des Seitendreiecks kann auch leicht durch Zeichnung bestimmt werden.

36) Wie groß ist die ganze Oberfläche einer abgekürzten regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn die Seite des größeren Quadrats $= 8'\ 6''$, die des kleinern $= 5'\ 5''$ und die Höhe eines Seitenparalleltrapezes $= 15'\ 4''$ ist?

Auflös. Inhalt des größern Quadrats $= 8{,}6 \times 8{,}6 = 73{,}96\,\square'$

„ „ kleinern „ $= 5{,}5 \times 5{,}5 = 30{,}25\,\square'$

Inhalt eines Seitenparalleltrapezes (nach Thl. I. §. 54. a.) $= \frac{8{,}6 + 5{,}5}{2} \times 15{,}4 = 108{,}57\,\square'$, also

der des Mantels $= 108{,}57 \times 4 =$ . . . . $434{,}28\,\square'$

folglich die ganze Oberfläche $= 538{,}49\,\square'$

37) Die beiden Grundflächen einer abgekürzten Pyramide betragen $16\,\square'$ und $25\,\square'$, die senkrechte Entfernung beider ist $9'$; wie groß ist der Cubikinhalt dieser Pyramide?

Auflös. Nach der in §. 39. c. angegebenen Formel wird der Cubikinhalt $= \frac{(25 + 16 + \sqrt{25 \times 16}) \times 9}{3} = 183\,c'$.

Anmerkung. Nach der Annäherungsmethode (Anmerkung 1. zu §. 39. c.) wird der Cubikinhalt $= \frac{25 + 16}{2} \times 9 = 184{,}5\,c'$; also um $1\frac{1}{2}\,c'$ zu groß.

38) Wie groß ist der Cubikinhalt eines vierseitigen pyramidalischen Baumstammes, welcher an der größern Grundfläche $3'\ 2''$ breit und $2'\ 4''$ dick, an der kleinern aber $2'\ 8''$ breit und $2'$ dick ist und eine Länge von $31'\ 5''$ hat?

Auflös. Der Cubikinhalt wird nach §. 39. c. $= 208{,}215\,c'$, oder $208\,c'\ 215\,c''$.

Anmerkung. Nach der Näherungsmethode erhält man $209{,}16\,c'$; also nur $945\,c''$ zu viel.

39) Ein eiſernes Gewicht hat die Form einer abgekürzten regelmäßigen ſechsſeitigen Pyramide, die Seite der größern Grundfläche beträgt 8″, die der kleinern 6″ und die Höhe 5″; wie ſchwer iſt daſſelbe?

Auflöſ. Nach Thl. I. §. 61. d. iſt der Inhalt der größern Grundfläche $= 0{,}8 \times 0{,}8 \times 2{,}598 = 1{,}66272$ □′, der der kleinern $= 0{,}5 \times 0{,}5 \times 2{,}598 = 0{,}6495$ □′, alſo der Cubikinhalt des Gewichts (§. 39. c.) =

$$\frac{(1{,}66272 + 0{,}6495 + \sqrt{1{,}66272 \times 0{,}6495}) \times 0{,}5}{3}$$

$= 0{,}55857$ c′ und hieraus das Gewicht (§. 23) $= 0{,}55857 \times 54 \times 7{,}2$ $= 217$ ℔ 5 Loth.

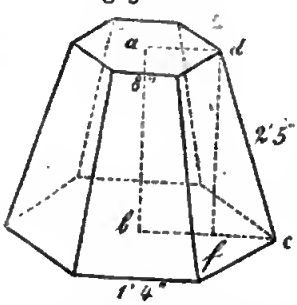
40) Die Inhalte der beiden Grundflächen einer abgekürzten Pyramide von 548 c′ Inhalt betragen 64 □′ und 56 □′ 25 □″; wie hoch iſt dieſelbe?

Auflöſ. Nach der in §. 39. c. Anmerk. 2 aufgeſtellten Formel 1. wird die Höhe $h = \frac{3 \times 548}{(64 + 56{,}25 + \sqrt{64 \times 56{,}25})} = \frac{1644}{180{,}25} =$ 9,12′ oder 9′ 1″ 2‴.

41) Ein Körper von Eiſen hat die Geſtalt einer regelmäßigen ſechsſeitigen abgekürzten Pyramide. Die Seite der untern Grundfläche mißt 1′ 4″, die der obern 8″ und jede der ſchiefen Seitenkanten iſt 2′ 5″ lang; wie groß iſt das Gewicht dieſes Körpers, das ſpec. Gew. zu 7,2 gerechnet?

Auflöſ. Man hat hier zunächſt, um den Cubikinhalt berechnen zu können, die Höhe ab (Fig. 39.) zu beſtimmen, wie folgt:

Fig. 39.



Nach Theil I. §. 61. b. wird der Halbmeſſer $bc = 1{,}4'$ und der $ad = 0{,}8'$. Zieht man nun df ſenkrecht auf bc, ſo entſteht das Rechteck $adfb$ und ein rechtwinkliges Dreieck dfc, in welchem $fc = bc - bf = 1{,}4 - 0{,}8 = 0{,}6'$ iſt.

Nach Theil I. §. 49. wird nun das Quadrat über $df =$ $2{,}5 \times 2{,}5 - 0{,}6 \times 0{,}6 = 5{,}89$; folglich df oder auch die Höhe $ab = \sqrt{5{,}89} = 2{,}42'$.

Der Inhalt des untern Sechsecks iſt nach Theil I. §. 61. d. $= 2{,}598 \times 1{,}4 \times 1{,}4 = 5{,}09208$ □′, der des obern =

$2{,}598 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 1{,}66272$ □′; folglich nach §. 39. c. der Cubikinhalt =

$$\frac{(5{,}09208 + 1{,}66272 + \sqrt{5{,}09208 \times 1{,}66272}) \times 2{,}42}{3}$$

$= 7{,}7960784$ c′ und endlich nach §. 23. das Gewicht =

$7{,}7960784 \times 54 \times 7{,}2 = 30$ Ctr. 31 ℔.

42) Wie groß iſt der Mantel und die ganze Oberfläche eines Cylinders von 18′ Höhe′ wenn ſein Umfang 7′ 8″ 5‴ beträgt?

Auflöſung. Nach §. 41. a. wird der Inhalt des Mantels = $7{,}85 \times 18 = 141{,}3$ □′.

Nach Theil I. §. 63. b. iſt der Durchmeſſer = $7{,}85 : 3{,}14 = 2{,}5$′, alſo der Inhalt der Grundfläche nach Theil I. §. 63. c. = $4{,}90625$ □′; folglich die ganze Oberfläche =

$141{,}3$ □′ + $2 \times 4{,}90625$ □′ = 151 □′ $11\frac{1}{4}$ □″.

43) Eine walzenförmige Säule hat eine Höhe von 22′ und einen Durchmeſſer von 3′ 6″; wie groß iſt die krumme Oberfläche derſelben?

Auflöſ. Der Umfang iſt = $3{,}6 \times 3{,}14 = 11{,}304$′ folglich die krumme Oberfläche (§. 41. a.) = $11{,}304 \times 22 = 248{,}688$ □′.

44) Wie groß iſt der Cubikinhalt eines 12′ hohen Cylinders, deſſen Halbmeſſer 1′ 5″ lang iſt?

Auflöſung. Inhalt der Grundfläche (Theil I. §. 63. c. 2.) = $1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14 = 7{,}065$ □′, folglich der Cubikinhalt nach §. 41. c. = $7{,}065 \times 12 = 84{,}78$ c′ = 84 c′ 780 c″.

45) Der Umfang einer 48′ hohen Säule beträgt 14′ 1″ 3‴; wie groß iſt der Cubikinhalt derſelben?

Auflöſ. Der Durchmeſſer iſt = $14{,}13 : 3{,}14 = 4{,}5$′, alſo der Halbmeſſer = $2{,}25$′ und der Inhalt der Baſis (Thl. I. §. 63. c. 1.) = $\frac{14{,}13 \times 2{,}25}{2} = 15{,}89625$ □′. Der Cubikinhalt wird daher (§. 41. c.) = $15{,}89625 \times 48 = 763{,}02$ c′ = 763 c′ 20 c″.

46) Wie viel Maas faßt ein cylindriges Gefäß, welches im Lichten 1′ 8″ Weite und eine Höhe von 3′ hat?

Auflöſung. Halbmeſſer = $0{,}9$′, alſo der Inhalt des Bodens = $0{,}9 \times 0{,}9 \times 3{,}14 = 2{,}5434$ □′ und der Cubikinhalt des Gefäßes (§. 41. c.) = $2{,}5434 \times 3 = 7{,}6302$ c′. Dieſes faßt demnach (§. 18. Anmerk.) $7{,}6302 \times 18 = 137{,}3436$ Maas.

47) Eine Marmorſäule hat einen Umfang von 7,536′ und eine Höhe von 16′; wie groß iſt das Gewicht derſelben? (Spec. Gewicht des Marmors ſei = 3.)

Auflöſ. Der Durchmeſſer iſt = 7,536 : 3,14 = 2,4′, alſo der Halbmeſſer = 1,2′ und der Inhalt der Grundfläche = 7,536 × 0,6 = 4,5216 □′. Der Cubikinhalt beträgt demnach (§. 41. c.) 4,5216 × 16 = 72,3456 c′ und das Gewicht (§. 23.) = 72,3456 × 54 × 3 = 11719,9872 ℔ oder beinahe 117¼ Ctr.

48) Es ſoll ein Seſter verfertigt werden, welches 1′ Durchmeſſer hat; wie hoch muß man daſſelbe machen?

Auflöſ. 1 Seſter = $\frac{10}{18}$ oder $\frac{5}{9}$ = 0,555555 c′, alſo, da der Inhalt des Bodens (Thl. I. §. 63. c. 2.) = 0,5 × 0,5 × 3,14 = 0,785□′ iſt, ſo wird die Höhe des Seſters (§. 41. e.) = 0,555555 : 0,785 = 0,707′ oder 7″ $\frac{7}{10}$‴.

49) Ein oben offenes Gefäß von Blech ſoll 2 Maas faſſen und 6″ hoch werden; wie groß wird der Bodenhalbmeſſer und wie viel Blech iſt zur Verfertigung erforderlich?

Auflöſ. 2 Maas = $\frac{2}{18}$ = 0, 111111 c′; alſo (§. 41. d.) der Inhalt der Grundfläche = 0,111111 : 0,6 = 0,185185 . . □′.

Nach Theil I. §. 63. d. wird demnach der Halbmeſſer = $\sqrt{\frac{0,185185}{3,14}} = \sqrt{0,058976} = 0,242'$ oder 2″ 4⅕‴.

Das erforderliche Blech beträgt (§. 41. a.) 0,484 × 3,14 + 0,185185 = 1,704945 □′ oder 1 □′ 70½ □″.

50) In ein Gefäß, welches die Form eines Cylinders hat und 1′ 4″ weit und 3′ hoch iſt, werden 27 Maas Waſſer gegoſſen; wie hoch iſt der Waſſerſpiegel über dem Boden?

Auflöſ. Die Flüſſigkeit bildet einen Cylinder von 27 Maas oder 1½ c′ Inhalt und einer Grundfläche von 1,4′ Durchmeſſer. Der Inhalt der letztern iſt aber (Thl. I. §. 63. c.) = 0,7 × 0,7 × 3,14 = 1,5386 □′, alſo beträgt die Höhe der Waſſerſäule (§. 41. e.) = 1,5 : 1,5386 = 0,974′ oder 9″ 7⅗‴.

51) Es ſoll ein eiſernes Gewicht von der Form eines Cylinders gegoſſen werden, welches gerade 100 ℔ wiegt; wie hoch wird daſſelbe gemacht werden müſſen, wenn der Durchmeſſer 6″ betragen ſoll?

Auflöſ. Das ſpec. Gew. iſt 7,2, alſo nach §. 24. der Cubikinhalt = $\frac{100}{54 \times 7,2} = \frac{100}{388,8} = 0,257201$ c′.

Der Inhalt der Grundfläche iſt = 0,3 × 0,3 × 3,14 = 0,2826 □′, folglich nach §. 41. e. die Höhe = 0,257201 : 0,2826 = 0,91′ oder 9″ 1‴.

52) Ein bleierner Cylinder von 2′ 8″ Länge hat ein Gewicht von

3 Ctr.; wie dick iſt derſelbe? (ſpec. Gew. des Bleies = 11,3).

Auflöſung. Cubikinhalt (§. 24.) $= \frac{300}{54 \times 11,3} = \frac{300}{610,2} =$ 0,491642 c′, alſo der Inhalt des Querſchnitts (§. 41. d.) = 0,491642 : 2,8 = 0,17558 □′; folglich (Thl. I. §. 63. d.) der Halbmeſſer $= \sqrt{\frac{0,17558}{3,14}} = \sqrt{0,0559} = 0,236'$ und der Durchmeſſer = 0,236 × 2 = 4″ 7½‴.

53) Ein prismatiſcher Brunnentrog von 8′ Länge 3′ 5″ Breite und 4′ Tiefe (im Lichten) iſt mit Waſſer gefüllt; wie viel Mal muß man mit einem cylinderförmigen Gefäße von 6″ Durchmeſſer und 1′ 5″ Höhe ſchöpfen, um denſelben zu entleeren, wenn das Gefäß immer ganz gefüllt wird?

Auflöſ. Inhalt des Troges = 8 × 3,5 × 4 = 112 c′. Inhalt des Gefäßes = 0,3 × 0,3 × 3,14 × 1,5 = 0,4239 c′; demnach muß man ſchöpfen 112 : 0,4239 = 264 mal.

54) Um die innere Weite einer Glasröhre zu meſſen, hat man in dieſelbe ½ Loth Queckſilber gebracht und gefunden, daß dieſes darin einen 6″ 5‴ langen Cylinder bildete; wie groß war der innere Durchmeſſer der Röhre? (Spec. Gew. = 13,6.)

Auflöſ. Cubikinhalt des Queckſilbers (da ½ Loth = $\frac{1}{64}$ = 0,015625 ℔) nach §. 24. $= \frac{0,015625}{54 \times 13,6} = 0,000021275$ c′; alſo nach §. 41. d. der Inhalt des Querſchnitts = 0,000021275 : 0,65 = 0,00003273 □′; folglich nach Theil I. §. 63. d. der Halbmeſſer $= \sqrt{\frac{0,00003273}{3,14}}$ = 0,0032′ und der Durchmeſſer = 0,0064′ oder 6⅔ IV.

55) Welches Gewicht hat ein Mühlſtein von 4′ Durchmeſſer, wenn ſeine Höhe 9″ 5‴ beträgt? (Spec. Gew. = 2,8.)

Auflöſ. Cubikinhalt = 2 × 2 × 3,14 × 0,95 = 11,932 c′, folglich das Gewicht = 11,932 × 54 × 2,8 = 644,328 ℔.

56) In ein cylindriſches Gefäß von 9″ Weite wird mit einem andern von 3″ Weite und 8″ Höhe Waſſer geſchöpft; bis zu welcher Höhe wird erſteres gefüllt ſein, nachdem man 6 mal geſchöpft hatte?

Auflöſ. Cubikinhalt des nach dem 6ten Male geſchöpften Waſſers = 0,15 × 0,15 × 3,14 × 0,8 × 6 = 0,33912 c′. Inhalt der

Grundfläche des größern Gefäßes $= 0{,}45 \times 0{,}45 \times 3{,}14 = 0{,}63585$ □′. Also nach §. 41. e. die Höhe des Wasserstandes $= 0{,}33912 : 0{,}63585 = 0{,}533'$ oder 5″ $3\frac{3}{10}$‴.

57) Für einen runden Baumstamm von 36′ Länge und 4′ Dicke wurden $150\frac{7}{10}$ fl. bezahlt; wie theuer kam ein Cubikfuß?

Auflös. Inhalt des Querschnitts $= 2 \times 2 \times 3{,}14 = 12{,}56$ □′, also der Cubikinhalt des Stammes (§. 41. c.) $= 12{,}56 \times 36 = 452{,}16$ c′.

1 c′ kostete demnach $150{,}7 : 452{,}16 = 0{,}333\ldots$ oder 20 kr.

58) Wie groß ist der Cubikinhalt eines hohlen Cylinders von 18′ Höhe, wenn der äußere Durchmesser = 12″ und die Weite im Lichten = 6″ ist?

Auflösung. Der Inhalt des ganzen Cylinders ist $= 20{,}3472$ c′. Der Inhalt des hohlen Raumes beträgt 5,0868 c′; folglich wird der Cubikinhalt des hohlen Cylinders $= 20{,}3472 - 5{,}0868 = 15{,}2604$ c′ oder 15 c′ 260 c″ 400 c‴.

59) Wie groß ist der Cubikinhalt einer 12′ langen eisernen Röhre, wenn deren Umfang 3′ 1″ 4‴ beträgt und die Eisendicke = 2″ 5‴ ist?

Auflös. Der äußere Durchmesser wird = 1′; also der Cubikinhalt des ganzen Cylinders = 9,42 c′. Da die Dicke des Eisens 2″ 5‴ beträgt, so ist der Halbmesser des hohlen Raumes $= 0{,}5' - 0{,}25' = 0{,}25'$ und der Cubikinhalt desselben $= 2{,}355$ c′; folglich der Cubikinhalt der Eisenmasse $= 9{,}42 - 2{,}355 = 7{,}065$c′ oder 7 c′ 65 c″.

60) Wie groß ist der Mantel und die ganze Oberfläche eines Kegels, wenn der Halbmesser der Grundfläche = 2′ 5″ und die Seite desselben = 8′ 6″ messen?

Auflös. Mantel (§. 43. a.) $= \frac{5 \times 3{,}14 \times 8{,}6}{2} = 67$ □′ 51 □″

Inhalt der Grundfläche $= 2{,}5 \times 2{,}5 \times 3{,}14 = 19$ □′ $62\frac{1}{2}$ □″

folglich die Oberfläche $= 87$ □′ $13\frac{1}{2}$ □″

61) Die Grundfläche eines 8′ hohen Kegels beträgt 6 □′; wie groß ist der Cubikinhalt desselben?

Auflös. Nach §. 43. c. ist der Cubikinhalt $= \frac{6 \times 8}{3} = 16$ c′.

62) Der Halbmesser der Grundfläche eines 2′ 4″ hohen Kegels beträgt 4″; wie groß ist sein Cubikinhalt?

Auflöſ. Der Inhalt der Grundfläche iſt $= 0{,}4 \times 0{,}4 \times 3{,}14 =$ 0,5024 □′, alſo der Cubikinhalt (§. 43. c.) $= \frac{0{,}5024 \times 2{,}4}{3}$ $= 0{,}40192\ c' = 401\ c''\ 920\ c'''$.

63) Wie groß iſt die ganze Oberfläche und der Cubikinhalt eines 6′ hohen Kegels, wenn der Halbmeſſer der Grundfläche 1′ 5″ lang iſt?

Auflöſ. Die Seite des Kegels iſt (§. 43. f.) $= \sqrt{6 \times 6 + 1{,}5 \times 1{,}5}$ $= \sqrt{38{,}25} = 6{,}18'$, alſo nach §. 43. a. der Mantel $= \frac{3 \times 3{,}14 \times 6{,}18}{2} = 29{,}1078$ □′. Der Inhalt der Grundfläche iſt $1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14 = 7{,}065$ □′, folglich die Oberfläche (§. 43. b.) $= 36{,}1728$ □′.

Der Cubikinhalt iſt (§. 43. c.) $= \frac{7{,}065 \times 6}{3} = 14{,}13\ c'. =$ 14 c′ 130 c″

Anmerkung. Durch Zeichnung läßt ſich die Seite auf folgende Weiſe finden: Man mache (Fig. 40) $a\,b = 1'\ 5''$, $a\,c$ ſenkrecht auf $a\,b = 6'$, ſo gibt $b\,c$ die verlangte Seite.

Fig. 40.

64) Der Umfang der Grundfläche eines Kegels beträgt 6′ 2″ 8‴, die Seite iſt 5′ 4″ lang; wie groß iſt der Inhalt des Mantels und der Cubikinhalt?

Aufl. Der Inhalt des Mantels iſt $= \frac{6{,}28 \times 5{,}4}{2} = 16{,}956$ □′ die Höhe des Kegels iſt nach §. 43. e. $= \sqrt{5{,}4 \times 5{,}4 - 1 \times 1} = \sqrt{28{,}16} = 5{,}3'$ (denn der Durchmeſſer iſt $= 6{,}28 : 314 = 2'$, alſo der Halbmeſſer $= 1'$). Der Cubikinhalt wird, weil die Grundfläche $= 1 \times 1 \times 3{,}14 = 3{,}14$ □′ Inhalt hat, nach §. 43 c. $= \frac{3{,}14 \times 5{,}3}{3} = 5{,}547333\ c' = 5\ c'$ 547 c″ 333 c‴.

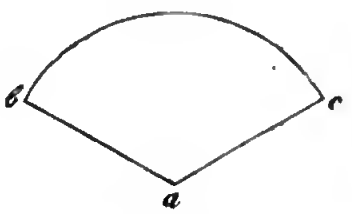
65) Ein kegelförmiger Trichter ſoll 4 Maas faſſen. Wie groß muß die Seite werden, wenn die Weite 8″ betragen ſoll und wie wird das Netz hierzu gezeichnet?

Auflöſ. 4 Maas ſind $\frac{4}{18}$ oder $\frac{2}{9}\ c' = 0{,}222222\ c'$; alſo, da der Inhalt der Oeffnung $= 0{,}4 \times 0{,}4 \times 3{,}14 = 0{,}5024$ □′ beträgt,

ist nach §. 43. d. die Höhe des Trichters $= \frac{0{,}222222 \times 3}{0{,}5024} =$ 1,326′.

Die Seite wird also (§. 43. f.) $= \sqrt{1{,}326 \times 1{,}326 + 0{,}4 \times 0{,}4}$ $= \sqrt{1{,}918276} = 1{,}385' = 1'\,3''\,8\frac{1}{2}'''$.

Fig. 41.



Beschreibt man daher (Fig. 41.) mit $ab = 1'\,3''\,8\frac{1}{2}'''$ einen Bogen bc und macht diesen gleich dem Umfang der Oeffnung $= 0{,}8 \times 3{,}14 = 2{,}512' = 2'\,5''\,1'''$, so ist abc das Netz zu dem Trichter.

66) Ein Haufen Sand hat die Gestalt eines Kegels. Wie viel Cubikfuß enthält derselbe, wenn der Umfang auf dem Boden 47′ 1″ beträgt und eine Linie vom Umfange nach der Spitze gemessen 25′ lang ist?

Auflösung. Der Durchmesser der Grundfläche ist $= 47{,}1 : 3{,}14$ $= 15'$, also der Halbmesser $= 7{,}5'$ und der Inhalt derselben $=$ $7{,}5 \times 7{,}5 \times 3{,}14 = 176{,}625\,\square'$. Die Höhe des Haufens (§. 43. e.) $= \sqrt{(25 \times 25 - 7{,}5 \times 7{,}5)} = \sqrt{568{,}75} = 23{,}84'$; folglich der Cubikinhalt (§. 43. c.) $= \frac{176{,}625 \times 23{,}84}{3} =$ 1403,58 c′.

67) Ein Kegel von Kupfer wiegt 50 ℔ und ist 5″ hoch; wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche? (Spec. Gewicht $=$ 8,78.)

Auflös. Nach §. 24. ist der Cubikinhalt $= \frac{50}{54 \times 8{,}78} = 0{,}105458\,c'$, also nach §. 43. d. der Inhalt der Grundfläche $= \frac{0{,}105458 \times 3}{0{,}5}$ $= 0{,}63275$, folglich der Halbmesser $= \sqrt{\frac{0{,}63275}{3{,}14}} = 4''\,4\frac{1}{5}'''$.

68) Die Durchmesser der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels betragen 5′ und 4′, die Seite desselben ist 8′ lang; wie groß ist der Inhalt des Mantels und der ganzen Oberfläche?

Auflös. Der Umfang des größern Kreises ist $= 5 \times 3{,}14 = 15{,}7'$; der des kleinern Kreises $= 4 \times 3{,}14 = 12{,}56$; also nach §. 45. a.

der Mantel $= \frac{15,7 + 12,56}{2} \times 8 =$ . . . . 113,04 □′

der Inhalt der größern Grundfläche $=$

$2,5 \times 2,5 \times 3,14$ 19,625 □′

„ „ „ kleinern „ $= 2 \times 2 \times 3,14$ 12,56 □′

daher die ganze Oberfläche $=$ 145,225 □′

69) Die Halbmesser der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels sind 6′ und 5′, die senkrechte Entfernung derselben beträgt 9′; wie groß ist der Cubikinhalt?

Auflös. Setzt man in der Formel §. 45. c. $R = 6$, $r = 5$ und $h = 9$, so folgt der Cubikinhalt $= (6 \times 6 + 5 \times 5 + 6 \times 5) \times \frac{3,14 \times 9}{3} = (36 + 25 + 30) \times 9,42 = 857,22$ c′.

Anmerkung. Wendet man die beiden in §. 45. c. angeführten Näherungsmethoden an, so erhält man:

1) Mittel beider Halbmesser $= \frac{6 + 5}{2} = 5,5$; Inhalt des zugehörigen Kreises $= 3,14 \times 5,5 \times 5,5 = 94,985$ □′; also der Cubikinhalt $= 94,985 \times 9 = 854,865$ c′.

2) Inhalt des größern Kreises $= 6 \times 6 \times 3,14 =$ 113,04 □′

„ „ kleinern „ $= 5 \times 5 \times 3,14 =$ 78,5 □′

Summe beider $=$ 191,54 □′

also der Cubikinhalt $= \frac{191,54 \times 9}{2} = 861,93$ c′.

Das Resultat nach der ersten Methode ist also um 2 c′ 355 c″ zu klein und das der zweiten um 4 c′ 710 c″ zu groß. Die Abweichung von dem wahren Werthe ist hier beträchtlich, weil die Inhalte der beiden Kreise um sehr viel differiren.

70) Ein 30′ langer Baumstamm ist an dem einen Ende 3′ und an dem andern 2′ 6″ dick; wie groß ist der Cubikinhalt?

Auflös. Man hat in der §. 45. c. angeführten Formel für $R = \frac{3}{2} =$ 1,5′, für $r = \frac{2,6}{2} = 1,3$′ und für $h = 30$′ zu setzen. Es wird der Cubikinhalt $=$

$$\frac{(1,5 \times 1,5 + 1,3 \times 1,3 \times 1,5 \times 1,3) \times 3,14 \times 30}{3}$$

$= 184,946$ c′ oder 184 c′ 946 c″.

Anmerkung. Annähernd erhält man:

Nach der ersten Methode: Größerer Halbmesser $= 1,5$′, kleinerer Halbmesser $= 1,3$′, Mittel beider $= \frac{1,5 + 1,3}{2} = 1,4$′;

Inhalt des zugehörigen Kreises $= 3{,}14 \times 1{,}4 \times 1{,}4 = 6{,}1544 \square'$; also der Cubikinhalt $= 6{,}1544 \times 30 = 184{,}632\,c'$.

Nach der zweiten Methode:

Inhalt des größern Kreises $= 1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14 = 7{,}065 \square'$

„ „ kleinern „ $= 1{,}3 \times 1{,}3 \times 3{,}14 = 5{,}3066 \square'$

Summe beider $= 12{,}3716 \square'$

also der Cubikinhalt $= \frac{12{,}3716 \times 30}{2} = 185\,c'\ 574\,c''$.

Die erste Art liefert ein Resultat nur um 314 c'' zu klein und die zweite um 628 c'' zu groß.

71) Ein runder Baumstamm hat an dem untern Theile einen Umfang von 12′ 5″ 6‴ und an dem obern Ende einen solchen von 9′ 4″ 2‴, seine Länge beträgt 33′; wie groß ist der Cubikinhalt und was kostet dieser Stamm, wenn für den Cubikfuß 24 kr. bezahlt werden?

Auflös. Der Durchmesser am untern Ende ist $= 12{,}56 : 3{,}14 = 4'$, und der am obern $= 9{,}42 : 3{,}14 = 3'$ also ist in der Formel für $R = \frac{4}{2} = 2'$, für $r = \frac{3}{2} = 1{,}5'$ und für $h = 33'$ zu setzen.

Man findet: Cubikinhalt $= 319{,}495\,c'$. Der Stamm kostet demnach $319{,}495 \times 24$ kr. oder 127 fl. 47 kr.

72) Ein Kessel ist oben 3′ 4″ und am Boden 2′ 8″ weit und 2′ 4″ tief; wie viel Maas Wasser faßt derselbe?

Auflös. Setzt man in der bekannten Formel für $R = \frac{3{,}4}{2} = 1{,}7'$, für $r = \frac{2{,}8}{2} = 1{,}4'$ und für $h = 2{,}4'$, so wird der Cubikinhalt $=$

$$\frac{(1{,}7 \times 1{,}7 + 1{,}4 \times 1{,}4 + 1{,}7 \times 1{,}4) \times 3{,}14 \times 2{,}4}{3}$$

$= 18{,}16176\,c'$. Der Kessel faßt daher $18{,}16176 \times 18 = 326\frac{9}{10}$ Maas.

73) Man soll ein Gefäß von der Form eines abgekürzten Kegels aus Blech verfertigen. Dasselbe muß oben 1′ 4″ und unten 1′ weit werden und gerade 1 Sester fassen; wie tief wird das Gefäß; wie groß muß man eine Seite desselben machen; wie viel Blech ist dazu erforderlich; und wie wird das Netz hierzu construirt?

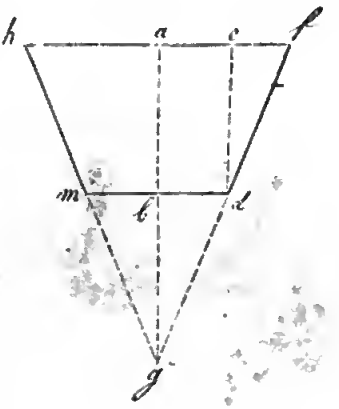
Auflös. Setzt man in der in §. 45. Anmerkung 2. gegebenen Formel von h für $C = \frac{1}{15} = 0{,}555\ldots\ldots\,c'$ (der Inhalt eines Sesters), für $R = \frac{1{,}4}{2} = 0{,}7'$ und für $r = \frac{1}{2} = 0{,}5'$, so findet man die

$$\text{Tiefe (Höhe)} = \frac{3 \times 0{,}555}{(0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}7 \times 0{,}5) \times 3{,}14}$$

$$= \frac{1{,}665}{3{,}4226} = 0{,}486' \text{ oder } 4'' \; 8\tfrac{1}{3}'''.$$

Die Seite fd (Fig. 42) des Gefäßes findet man aus dem rechtwinkligen Dreieck acf. Es ist nämlich $fd = \sqrt{cf \times cf + cd \times cd}$, oder da $cd = ab = 0{,}486'$ und $cf = af - ac = af - bd = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2'$ ist; auch $fd = \sqrt{0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}486 \times 0{,}486} = \sqrt{0{,}276196} = 0{,}525'$.

Fig. 42.



Da ferner der Umfang der Oeffnung $= 1{,}4 \times 3{,}14 = 4{,}396'$ und der des Bodens $= 3{,}14'$ beträgt, so wird nach §. 45. a. die krumme

$$\text{Oberfläche} = \frac{(4{,}396 + 3{,}14) \times 0{,}525}{2} \; . \; . \; = \; 1{,}9782 \; \square'$$

Hierzu addirt den Inhalt des Bodens $=$

$$0{,}5 \times 0{,}5 \times 3{,}14 \; = \; 0{,}785 \; \square'$$

gibt für das erforderliche Blech $=$ $2{,}7632 \; \square'$.

Das Netz zu diesem Gefäße kann auf folgende Weise erhalten werden:

Man trage hf (Fig. 42.) $= 1' \; 4''$ auf, errichte in der Mitte die Senkrechte ab und mache sie $= 4'' \; 8\frac{1}{3}'''$, ziehe dann md parallel zu hf und mache $mb = bd = \frac{1}{2}$ Fuß (da $md = 1'$ werden soll), verbinde m mit h und d mit f und verlängere die Linien hm und fd bis sie sich in g schneiden, so geben die Linien gf und gd die zwei Radien mit welchen die concentrischen Kreisbogen des Netzes Fig. 29. gezeichnet werden müssen.

74) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel von 6′ Durchmesser?

Auflös. Nach §. 42. a. wird die Oberfläche $= 3{,}14 \times 3 \times 3 \times 4 = 113 \; \square' \; 4 \; \square''$.

75) Welche Oberfläche hat eine Kugel, deren größter Umfang $9' \; 4'' \; 2'''$ beträgt?

Auflös. Der Durchmesser ist $= 9{,}42 : 3{,}14 = 3'$, also der Halbmesser $= 1{,}5$ und die Oberfläche (§. 47. a.) $= 1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14 \times 4 = 28 \; \square' \; 26 \; \square''$.

76) Der Durchmesser einer Kugel beträgt 9″; wie groß ist der Cubikinhalt?

Auflöſ. Nach §. 47. b. iſt der Cubikinhalt $= \frac{3{,}14 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9}{6} = \frac{2{,}28906}{6} = 0{,}38151$ c′ oder 381 c″ 510 c‴.

77) Der Umfang des größten Kreiſes einer Kugel beträgt 1,413′; wie groß iſt der Kubikinhalt derſelben?

Auflöſ. Der Durchmeſſer iſt $= 1{,}413 : 3{,}14 = 0{,}45'$ alſo der Cubikinhalt (§. 47. b.) $= \frac{3{,}14 \times 0{,}45 \times 0{,}45 \times 0{,}45}{6} =$ 0,047688 c′ oder 47 c″ 688 c‴.

78) Wie groß iſt das Gewicht einer bleiernen Kugel von 6″ Durchmeſſer? (Spec. Gew. = 11,38.)

Auflöſ. Der Cubikinhalt iſt $= \frac{3{,}14 \times 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6}{6} =$ 0,11304 c′, alſo das Gewicht (§. 23.) $= 0{,}11304 \times 54 \times 11{,}38$ $= 69{,}4653408$ ℔ oder 69 ℔ 14 Loth.

79) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 12 □′ 56 □″; wie groß iſt der Durchmeſſer?

Auflöſ. Der Inhalt des größten Kreiſes iſt (§. 47. c.) $= 12{,}56 : 4$ $= 3{,}14$ □′, alſo (Thl. I. §. 63. d.) der Halbmeſſer $= \sqrt{\frac{3{,}14}{3{,}14}} =$ 1′ und der Durchmeſſer = 2′.

80) Der Cubikinhalt einer Kugel beträgt 220 c″ 781¼ c‴; wie groß iſt der Durchmeſſer?

Auflöſ. Nach §. 47. d.) iſt der Durchmeſſer $= \sqrt[3]{\frac{0{,}22078125 \times 6}{3{,}14}} = \sqrt[3]{0{,}421875} = 0{,}75'$ oder 7½″.

81) Eine maſſive Kugel von Meſſing wiegt 2½ ℔; wie groß iſt der Halbmeſſer derſelben? (Spec. Gew. = 8,44.)

Auflöſ. Nach §. 24. iſt der Cubikinhalt $= \frac{2{,}5}{54 \times 8{,}44} = \frac{2{,}5}{455{,}76}$ $= 0{,}005485$ c′, alſo der Durchmeſſer (§. 47. d.) $= \sqrt[3]{\frac{0{,}005485 \times 6}{3{,}14}} = \sqrt[3]{0{,}0101808} = 0{,}218'$ und der Halbmeſſer $= 0{,}109'$ oder 1″ $\frac{8}{10}$‴.

82) Wie groß iſt die Oberfläche unſerer Erde, wenn der Halbmeſſer 859,3 geographiſche Meilen beträgt?

Auflösung. Oberfläche = 859,3 × 859,3 × 3,14 × 4 = 9274259,9144 Quadratmeilen.

83) Wie groß ist der Cubikinhalt unserer Erde, wenn der Durchmesser 1718,6 geogr. Meilen beträgt?

Auflösung. Cubikinhalt (§. 47 b.) = $\frac{1718{,}6 \times 1718{,}6 \times 1718{,}6 \times 3{,}14}{6}$ = 2656457181,37 Cubikmeilen.

84) Welchen Durchmesser hat der Mond, da er ungefähr 50mal kleiner als unsere Erde ist?

Auflös. Nach Aufgabe 83. wird der Cubikinhalt des Mondes = 2656457181,37 : 50 = 53129143,62 Cubikmeilen, also §. 47. d. der Durchmesser = $\sqrt[3]{\frac{6 \times 53129143{,}62}{3{,}14}}$ = 466,5 Meilen.

85) Wie viel faßt ein halbkugelförmiger Kessel, wenn der Durchmesser im Lichten 4′ beträgt?

Auflös. Cubikinhalt der ganzen Kugel = $\frac{3{,}14 \times 4 \times 4 \times 4}{6}$ = 33,493 c′, also der Halbmesser = 16,7465 c′. Demnach faßt der Kessel 16,7465 × 18 = 301,437 Maas oder etwas über 3 Ohm 1 Maas.

86) Der äußere Durchmesser einer eisernen Hohlkugel beträgt 1′ 5″, die Eisendicke $1\frac{1}{2}$″; wie schwer ist dieselbe?

Auflös. Inhalt der ganzen Kugel = $\frac{1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 3{,}14}{6}$ = 1,76625 c′. Da die Eisendicke $1\frac{1}{2}$″ beträgt, so ist der Durchmesser der Höhlung = 1,5′ — 0,3′ = 1,2′ also ihr Inhalt (§. 17. b.) = $\frac{1{,}2 \times 1{,}2 \times 1{,}2 \times 3{,}14}{6}$ = 0,90432 c′; folglich der Inhalt der Hohlkugel = 1,76625 c′ — 0,90432 c′ = 0,86193c′ = 861 c″ 930 c‴ und das Gewicht = 0,86193 × 54 × 7,2 = 335,118384 ℔.

87) Wie viel Bleikugeln von 3‴ Durchmesser gehen auf 4 ℔? (Spec Gew. = 11,38.)

Auflösung. Eine Kugel hat einen Inhalt von $\frac{3{,}14 \times 0{,}03 \times 0{,}03 \times 0{,}03}{6}$ = 0,00001413 c′; 4 ℔ geben

(§. 24.) $\frac{4}{54 \times 11,35} = 0,006509\,c'$, folglich braucht man

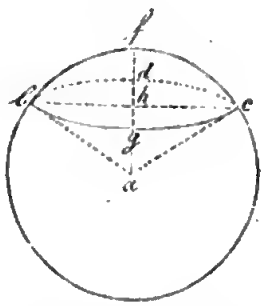
$0,006509 : 0,00001413 = 460$ Bleikugeln.

88) Der Durchmesser einer Kugel beträgt 2′ 5″, die Höhe eines Abschnitts 8″; wie groß ist der Inhalt der Haube und der Cubikinhalt des Abschnitts?

Auflös. Umfang eines größten Kreises $= 3,14 \times 2,5 = 7,85'$; folglich der Inhalt der Haube $bgcdf$ (Fig. 43.) (nach §. 47. e.) $= 7,85 \times 0,8 = 6,28\,\square'$.

Der Cubikinhalt des Sektors $acfb$ (Fig. 43.) wird (nach §. 17. f.) $= \frac{6,28 \times 1,25}{3} = 2,616666\,c'$.

Fig. 43.



Um den Cubikinhalt des Kegels abc zu finden, hat man zunächst den Halbmesser hc der Basis $bgcd$ zu bestimmen. Dieß geschieht auf folgende Weise durch Zeichnung: Man zeichne in verjüngtem Maaße über 2′ 5″ als Durchmesser einen Kreis, ziehe den Halbmesser af, mache $fh = 8''$, errichte hc senkrecht auf af in h, und messe die Länge von hc auf dem angenommenen Maaßstabe. Angenommen, man habe sie $= 1'\ 1''\ 6'''$ gefunden, so ist der Inhalt des Kreises $bgcd = 3,14 \times 1,16 \times 1,16 = 4,225184\,\square'$, also, da $ah = af - hf = 1,25 - 0,8 = 0,45$ ist, nach §. 43. c. der Cubikinhalt des Kegels $abc = \frac{4,225184 \times 0,45}{3} = 0,6337776\,c'$. Demnach erhält man nach §. 47. g. für den Cubikinhalt des Abschnitts $bgcdf = 2,616666\,c' - 0,6337776\,c'$ oder $1,982889\,c'$ d. i. $1\,c'\ 982\,c''\ 889\,c'''$.

89) Wie groß muß der Durchmesser eines halbkugelförmigen Kessels gemacht werden, wenn derselbe eine Ohm fassen soll?

Auflös. Da 18 Maas $1\,c'$ geben, so ist 1 Ohm oder 100 Maas $= \frac{100}{18} = 5,555555\,c'$ und eine vollständige Kugel von dem zu bestimmenden Durchmesser hält demnach $2 \times 5,555\ldots. = 11,111111\,c'$. Nach §. 47. d. wird also der Durchmesser $= \sqrt[3]{\frac{11,111111 \times 6}{3,14}} = \sqrt[3]{21,231422} = 2,76'$ oder $2'\ 7''\ 6'''$.

90) Der äußere Durchmesser einer eisernen Hohlkugel beträgt 1′ 4″, der Durchmesser des hohlen Raumes 1′ 2″; wie viel wiegt dieselbe? (Spec. Gew. = 7,2.)

Auflösung.

$$\text{Cub.-Inh. der ganzen Kugel} = \frac{1,4 \times 1,4 \times 1,4 \times 3,14}{6} = 1,436026 c'$$

$$\text{„ des hohlen Raumes} = \frac{1,2 \times 1,2 \times 1,2 \times 3,14}{6} = 0,90432\ c'$$

$$\text{Cub.-Inh. der Hohlkugel (§. 47. i)} = 0,531706 c'$$

folglich das Gewicht $= 0,531706 \times 54 \times 7,2 = 206,7272928$ ℔.

II. Berechnung eines Fasses.

Der Inhalt eines Fasses kann auf folgende Art gefunden werden:

1) Man denke sich das Faß durch einen Bauchschnitt in zwei Theile getheilt, rechne dann einen solchen Theil als abgekürzten Kegel nach einer der in §. 45. c. angegebenen Methoden und nehme den gefundenen Werth doppelt.

2) Man rechne den Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser gleich der Summe aus $\frac{2}{3}$ der Spundtiefe und $\frac{1}{3}$ der Bodentiefe ist, und multiplicire diesen Inhalt mit der Länge des Fasses.

Anmerkung. Von diesen Methoden ist die letztere die genauere.

Beispiel.

Wie viel Maas faßt ein 14″ langes Fäßchen, dessen Spundtiefe 1′ 1″ 7‴ und dessen Bodentiefe 1′ 5‴ beträgt?

Erste Auflösung. Nach einer der zuerst angeführten Methode erhält man (s. §. 45. c. Anmrkg. b):

Inhalt des Bodens $= 0,525 \times 0,525 \times 3,14 = 0,8651625$

„ „ Bauchschnitts $= 0,585 \times 0,585 \times 3,14 = 1,0745865$

folglich die Summe beider $= 1,9400490$

also der Cubikinhalt $= 1,940049 \times \frac{1,4}{2} = 1,3580343 c'$.

Da nun 1 Cubikfuß 18 Maas ausmacht, so faßt das Fäßchen $1,358 \times 18 = 24\frac{11}{25}$ Maas.

Zweite Auflösung. Nach der zweiten Art.

$\frac{2}{3} \times 1,17 = 0,78$

$\frac{1}{3} \times 1,05 = 0,35$

Summe beider $= 1,13 =$ dem Durchmesser, also

der Halbmesser = 0,565 und der Inhalt des Kreises = 0,565 × 0,565 × 3,14 = 1,0023665, folglich der Cubikinhalt des Fasses = 1,0023665 × 1,4 = 1,403313 c′; das Fäßchen faßt also 1,403313 × 18 = 25¼ Maas.

Beide Resultate sind nur um etwa 3 Schoppen verschieden.

III. Berechnung des Cubikinhalts eines Korpers von beliebiger Gestalt.

Um den Cubikinhalt eines beliebig gestalteten Körpers von geringem Volumen zu bestimmen, bringe man denselben in ein prismatisches oder cylinderförmiges Gefäß und fülle dieses hierauf mit Wasser oder feinem Sande. Alsdann berechne man den Cubikinhalt des Körpers sammt dem Sande, und den Cubikinhalt des Sandes für sich, nachdem der Körper herausgenommen ist, und ziehe letzteren von ersterem ab, so gibt der Unterschied den Cubikinhalt des fraglichen Körpers.

Würde z. B. ein cylinderförmiger Becher von 2′ Höhe und 3,14 □′ Grundfläche bis oben mit Sand gefüllt und beträgt die Höhe des Sandes nach Herausnahme des Körpers noch 8″; so folgt:

Cubikinhalt der ganzen Masse = 3,14 × 2 = 6,28 c′
„ des Sandes = 3,14 × 0,8 = 2,512c′
folglich der Cubikinhalt des Körpers = 3,768c′
oder 3 c′ 768 c″.

Besitzt der Körper eine bedeutende Größe, so umgebe man ihn mit Brettern in der Weise, daß diese einen einfach zu berechnenden Körper z. B. ein Prisma bilden. Schüttet man nun Sand in bekanntem Volumen hinein, bis der Körper ganz von demselben umgeben ist und rechnet alsdann den Cubikinhalt des Prismas, dessen Höhe bis zur Sandoberfläche reicht und zieht hiervon das bekannte Volumen des Sandes ab, so gibt der Rest den Cubiknhalt des Körpers.

Den Cubikinhalt sehr großer Körper kann man auch auf folgende Weise bestimmen:

Man verfertige ein Modell dieses Körpers und bestimme den Cubikinhalt desselben auf irgend eine der angegebenen Arten, also

entweder durch Abwägen mit Anwendung des specifischen Gewichtes oder durch Umgeben mit Sand u. s. w. Hierauf multiplizire man die Zahl, welche angibt, wie viel mal eine Seite des Körpers oder die Entfernung irgend zweier Punkte an demselben, größer ist, als die entsprechende Seite oder die Entfernung der entsprechenden zwei Punkte am Modell, dreimal mit sich und mit dem Cubikinhalt des Modells, so gibt das Produkt den verlangten Cubikinhalt des Körpers.

Anmerkung. Dieses Verfahren findet seinen Grund in der Anmerkung zu §. 48. Aufgabe 9.

IV. Specifische Gewichte.

Körper.	Specifisches Gewicht.	Gewicht eines Cubikfußes in badischen Pfund.
1) Metalle:		
Blei	11,38	614,52
Eisen, geschmiedet	7,78	420,12
— gegossen	7,2	388,8
— Stabeisen	7,84	423,36
Gold, gehämmert	19,36	1015,44
— gegossen	19,25	1039,5
Kupfer, gehämmert . . .	8,95	483,3
— gegossen	8,78	174,12
Messing	8,44	455,76
Platin	21,7	1171,8
Quecksilber	13,58 — 14	734 — 756
Silber, gehämmert	10,51	567,54
— gegossen	10,47	565,38
Stahl (Guß = Stahl) . . .	7,92	427,68
Zinn, gegossen	7,29	393,66
— gewalztes	7,17	403,38
2) Holzarten:		
Ahorn, frisch gefällt . . .	0,9	48,6
— trocken	0,65	35,1
Buchen, Roth=, frisch gefällt	0,98	52,92
— trocken	0,59	31,86
— Weiß=, frisch . . .	0,94	50,76
— trocken	0,76	41,04
Eiche, Stein=, trocken . . .	0,7	37,8
Kastanie „	0,57	30,78
Kork	0,24	12,96
Linde, trocken	0,55	29,7
Pappel „	0,39	21,06
Tanne „	0,55	29,7
Weide, Saal=, trocken . . .	0,53	28,62
3) Stein und Erdarten:		
Basalt	2,86	154,44

Körper.	Specifisches Gewicht.	Gewicht eines Cubikfußes in badischen Pfund.
Stein- und Erdarten:		
Baustein, im Mittel . . .	2,5	135
Granit, im Mittel	2,7	145,8
Gyps	1,87 — 2,96	100 — 160
Kalkstein	2,5	135
Kochsalz	2,2	118,8
Kreide	2,3	124,2
Marmor	2,7 — 2,83	145,8— 152,8
Quarz	2,65	143,1
Sand	1,4 — 1,77	75,6 — 95,6
Sandstein	2,2 — 2,75	118,8—148,5
Thon	1,9	102,6
4) Tropfbar flüssige Körper:		
Alkohol	0,792	42,768
Oel, Baum-	0,92	49,68
— Lein-	0,94	50,76
— Mohn-	0,92	49,68
— Rüb-	0,91	49,14
— Stein-	0,75 — 0,8	40,5—43,2
— Terpentin-	0,79 — 0,87	42,66—46,98
Säure, Schwefel-	1,85	99,9
— Salpeter-	1,52	82,08
— Salz-	1,19	64,26
Wein	0,9 — 1,05	48,6—56,7
Wasser, reines	1,000	54

V. Tabelle zur Vergleichung von Cubikfußen und dem Cubikmeter.

Cubik-Meter *).	Pariser Cub.-Fuß	England. Rußland. Cub.-Fuß.	Preußen. Dänemark. Rheinl. Cub.-Fuß.	Bayern. Cub.-Fuß.	Hannover Cub.-Fuß.	Sachsen. Cub.-Fuß.	Braunschweig. Cub.-Fuß.	Hessen-Kassel. Cub.-Fuß.	Würtemberg. Cub.-Fuß.	Baden. Nassau. Schweiz. Cub.-Fuß.	Oestreich. Cub.-Fuß	Hessen-Darmstadt. Cub.-Fuß.	Frankfurt. Cub.-Fuß.
1	29,17385	35,31658	32,34587	40,22350	40,12627	44,03176	43,03380	41,99374	42,52752	37,03704	31,65785	64,00000	43,42633
0,034277	1	1,210556	0,108728	1,378752	1,375419	1,509288	1,475081	1,439431	1,457727	1,269529	1,085145	2,193745	1,486968
0,028315	0,826067	1	0,915884	1,138941	1,136188	1,246773	1,218515	1,189066	1,204180	1,048715	0,896402	1,812180	1,228335
0,030916	0,901934	1,091842	1	1,243543	1,240538	1,361279	1,330426	1,298272	1,314774	1,145031	0,978730	1,983175	1,341137
0,024861	0,725294	0,878009	0,804154	1	0,997583	1,094678	1,069867	1,044010	1,057281	0,920781	0,787019	1,591108	1,078486
0,024921	0,727051	0,880136	0,806102	1,002423	1	1,097330	1,072459	1,046540	1,059842	0,923012	0,788956	1,594963	1,081105
0,022711	0,662564	0,802071	0,734603	0,913511	0,911303	1	0,977335	0,953715	0,965837	0,841144	0,718977	1,453496	0,985211
0,023237	0,677929	0,820671	0,751639	0,934695	0,932136	1,023190	1	0,975832	0,988235	0,860650	0,735651	1,487202	1,008058
0,023813	0,694719	0,840996	0,770255	0,957845	0,955530	1,048531	1,024767	1	1,012711	0,881966	0,753871	1,524035	1,033026
0,023514	0,685999	0,830440	0,760587	0,945823	0,943537	1,035371	1,011905	0,987449	1	0,870896	0,744408	1,504909	1,020058
0,027000	0,787694	0,953548	0,873339	1,086034	1,083409	1,188857	1,161913	1,133831	1,148243	1	0,854762	1,728000	1,171262
0,031588	0,921536	1,115571	1,021733	1,270570	1,267499	1,390864	1,359341	1,326488	1,343349	1,169916	1	2,021615	1,370228
0,015625	0,455841	0,551822	0,505404	0,628493	0,626973	0,687996	0,672403	0,656153	0,664492	0,578704	0,494653	1	0,678537
0,023052	0,672510	0,814110	0,745630	0,927224	0,924983	1,015011	0,992232	0,968031	0,980335	0,853770	0,729770	1,473760	1

*) Das Cubikmeter bildet die Einheit des französischen Holzmaaßes und wird dann Stere genannt.
1 Cubikdecimeter = 0,001 Cubikmeter bildet unter dem Namen Liter (Litre) die Einheit des franz. Hohlmaßes. — 100 Liter = 1 Hectoliter.

VI. Tabelle zur Vergleichung verschiedener Gewichte.

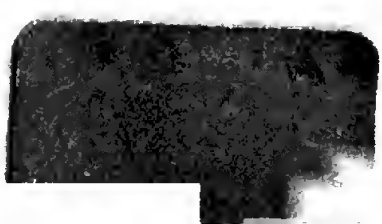
Frankreich. Kilogramm*).	Sachsen. Baden. Hessen-Darmstadt. Schweiz. Zollpfund.	England. Pfund. Avoir du poids Pfund.	Preußen. Hannover. Kurhessen. Braunschweig. Weimar. Pfund.	Bayern. Pfund.	Oesterreich. Pfund.	Dänemark. Norwegen. Pfund.	Schweden. Schalpfund.
1	2,000000	2,204597	2,138072	1,785714	1,785675	2,002768	2,351063
0,500000	1	1,102299	1,069036	0,892857	0,892838	1,001384	1,175532
0,453597	0,907195	1	0,969824	0,809996	0,809978	0,908451	1,066137
0,467711	0,935422	1,031114	1	0,835198	0,835180	0,936716	1,099618
0,560000	1,120000	1,234574	1,197321	1	0,999978	1,121550	1,316595
0,560012	1,120024	1,234601	1,197347	1,000022	1	1,121574	1,316624
0,499309	0,998618	1,100775	1,067559	0,891623	0,891604	1	1,173907
0,425339	0,850679	0,937702	0,909406	0,759535	0,759518	0,851856	1

*) Das Kilogramm ist das Gewicht von 1 Liter Wasser und hat 1000 Gramme.

VII. Tabelle zur Vergleichung verschiedener Hohlmaaße.

Frankreich. 1 Liter.	England. 1 Gallon.	Preußen. 1 Quart.	Bayern. 1 Maasskanne.	Hannover. 1 Stübchen.	Sachsen. 1 Dresdener Kanne.	Braunschweig. 1 Quartier.	Würtemberg. 1 Helleichmaas.	Baden. Schweiz. 1 Maas.	Schweden. 1 Kanne.	Oesterreich. 1 Maas.	Rußland. 1 Stoof.
1	0,22009	0,87333	0,93543	0,25680	1,06776	1,06741	0,54435	0,66666	0,38208	0,70664	0,81369
4,54345	1	3,96797	4,25008	1,16679	4,85134	4,84975	2,47324	3,02897	1,73600	3,21062	3,69698
1,14503	0,25201	1	1,07109	0,29405	1,22262	1,22222	0,62330	0,76335	0,43750	0,80913	0,93170
1,06902	0,23528	0,93362	1	0,27453	1,14146	1,14109	0,58192	0,71268	0,40846	0,75542	0,86986
3,89395	0,85704	3,40074	3,64252	1	4,15783	4,15646	2,11968	2,59597	1,48784	2,75165	3,16849
0,93653	0,20612	0,81791	0,87606	0,24051	1	0,99967	0,50980	0,62435	0,35784	0,66180	0,76205
0,93684	0,20619	0,81818	0,87635	0,24058	1,00032	1	0,50997	0,62456	0,35795	0,66201	0,76230
1,83704	0,40432	1,60436	1,71842	0,47176	1,96153	1,96088	1	1,22469	0,70191	1,29814	1,49479
1,50000	0,33014	1,31000	1,40314	0,38521	1,60164	1,60112	0,81652	1	0,57313	1,05997	1,22054
2,61718	0,57603	2,28569	2,44819	0,67211	2,79454	2,79362	1,42467	1,74479	1	1,84943	2,12959
1,41513	0,31146	1,23588	1,32375	0,36341	1,51102	1,51053	0,77032	0,94342	0,54070	1	1,15148
1,22896	0,27049	1,07330	1,14960	0,31560	1,31224	1,31181	0,66898	0,81930	0,46957	0,86844	1

678496 Ns



BIBLIOTECA